Maria Elena De Giuli Cesare Zuccotti

# E S E R C I Z I
# R I S O L T I

d i

# M A T E M A T I C A F I N A N Z I A R I A

# INDICE

## PARTE I

## TESTO DEGLI ESERCIZI


| | | pag. |
|---|---|---|
| 1 | LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE | 1 |
| 2 | LA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE | 4 |
| 3 | LA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA | 6 |
| | 3.1 La capitalizzazione composta per durate intere | 6 |
| | 3.2 La capitalizzazione composta: convenzione esponenziale | 8 |
| | 3.3 La capitalizzazione composta: convenzione lineare | 10 |
| 4 | LO SCONTO | 12 |
| | 4.1 Lo sconto razionale | 12 |
| | 4.2 Lo sconto commerciale | 14 |
| | 4.3 Lo sconto composto | 16 |
| 5 | LE RENDITE | 18 |
| 6 | LA COSTITUZIONE DI UN CAPITALE | 20 |
| 7 | I PRESTITI INDIVISI | 22 |
| | 7.1 L'ammortamento graduale | 22 |
| | 7.2 L'ammortamento a due tassi | 24 |
| | 7.3 L'ammortamento a rate costanti | 25 |
| | 7.4 L'ammortamento a quote capitale costanti | 27 |
| 8 | I PROGETTI ECONOMICO-FINANZIARI | 28 |
| 9 | LE SOLUZIONI APPROSSIMATE DI UNA EQUAZIONE: il metodo di bisezione | 33 |

# PARTE II

# RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI


| | | pag. |
|---|---|---|
| 1 | LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE | 34 |
| 2 | LA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE | 39 |
| 3 | LA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA | 44 |
| | 3.1 La capitalizzazione composta per durate intere | 44 |
| | 3.2 La capitalizzazione composta: convenzione esponenziale | 47 |
| | 3.3 La capitalizzazione composta: convenzione lineare | 51 |
| 4 | LO SCONTO | 56 |
| | 4.1 Lo sconto razionale | 56 |
| | 4.2 Lo sconto commerciale | 59 |
| | 4.3 Lo sconto composto | 63 |
| 5 | LE RENDITE | 66 |
| 6 | LA COSTITUZIONE DI UN CAPITALE | 71 |
| 7 | I PRESTITI INDIVISI | 76 |
| | 7.1 L'ammortamento graduale | 76 |
| | 7.2 L'ammortamento a due tassi | 80 |
| | 7.3 L'ammortamento a rate costanti | 83 |
| | 7.4 L'ammortamento a quote capitale costanti | 87 |
| 8 | I PROGETTI ECONOMICO-FINANZIARI | 91 |
| 9 | LE SOLUZIONI APPROSSIMATE DI UNA EQUAZIONE: il metodo di bisezione | 102 |

# PARTE I

# TESTO DEGLI ESERCIZI

## 1 LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE

**Esercizio n. 1.1**

Considerata la funzione

$$f(t) = \frac{2^{\left(\frac{t}{10}\right)}}{1 + 0{,}04t}, \qquad t \geq 0,$$

determina se può rappresentare il fattore di montante di una legge di capitalizzazione e poi calcola quanto segue:
**a)** il tasso unitario d'interesse;
**b)** il valore attuale $V(0)$ del capitale di € $100,00$, esigibile alla scadenza $t = 3$;
**c)** l'intensità istantanea di interesse per $t = 3$.

**Esercizio n. 1.2**

In riferimento alla funzione

$$f(t) = 1 - 0{,}02t + 0{,}05t^2, \qquad t \geq 0,$$

rispondi motivatamente alle seguenti domande:
**a)** $f(t)$ è il fattore di montante di un regime di capitalizzazione?
**b)** $f(t)$ è una funzione di capitalizzazione scindibile?
**c)** $f(t)$ è una funzione di capitalizzazione con tasso unitario di interesse $i = 3\%$?

**Esercizio n. 1.3**

Considerata la funzione

$$f(t) = (1 + \beta)^{t\,\beta^2}, \qquad t \geq 0, \qquad \beta > 0,$$

rispondi motivatamente alle seguenti domande:
**a)** $f(t)$ rappresenta un fattore di montante?
**b)** quale è l'intensità istantanea di interesse associata alla $f(t)$?
**c)** $f(t)$ rappresenta un fattore di montante scindibile?
**d)** quale relazione sussiste tra la $f(t)$ e la funzione $F(t) = (1 + i)^t$ ?

**Esercizio n. 1.4**

In relazione alla funzione

$$f(t) = \frac{3}{2 + e^{\alpha t}}, \qquad t \geq 0,$$

con $\alpha$ parametro reale indipendente da $t$, determina quanto segue:

**a)** i valori di $\alpha$ per i quali la funzione $f(t)$ rappresenta il fattore di montante di un regime di capitalizzazione;
**b)** il valore $\alpha = \bar{\alpha}$ per il quale il tasso unitario di interesse è il 5%;
**c)** l'intensità istantanea di interesse per $t = 2$ e $\alpha = \bar{\alpha}$;
**d)** il limite di $f(t)$ per $t \to +\infty$ e, sulla base di tale risultato, determina l'esistenza o meno del tempo di triplicazione del capitale investito.

**Esercizio n. 1.5**

Considerata la funzione

$$f(t) = \frac{1}{0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8^t}, \qquad t \geq 0,$$

**a)** individuare se essa descrive il fattore di montante di un regime di capitalizzazione;
**b)** calcolare il tasso unitario di interesse associato alla $f(t)$;
**c)** individuato il comportamento della $f(t)$, con $t$ che tende a $+\infty$, determinare se un capitale investito nel regime di capitalizzazione, caratterizzato da tale legge, potrà triplicare.

**Esercizio n. 1.6**

Considerata la funzione

$$f(t) = \left( \frac{2}{1 - \frac{1}{2}k} \right)^t,$$

con $t \geq 0$ e $k$ parametro reale indipendente da $t$, determina per quali valori di $k$ la funzione è fattore di montante.

**Esercizio n. 1.7**

Considerate le affermazioni sotto riportate

1) $f(t)$ è il montante di € $1,00$, fra $t$ anni, con la legge della *capitalizzazione composta*, al tasso di interesse del 25%, annuo;

2) $f(t)$ è il montante di € $1,00$, fra $t$ anni, con la legge dello *sconto commerciale,* al tasso di sconto del 20%, annuo;

3) $f(t)$ è il valore attuale di € $1,00$, esigibile fra $t$ anni, con la legge della *capitalizzazione semplice*, al tasso di interesse del 20%, annuo;

4) $f(t)$ è una legge di capitalizzazione, non scindibile;

individua quella che può essere riferita alla funzione

$$f(t) = \frac{1}{(1-0,2)^t}\,,$$

con $0 \leq t < 5$, e $t$ misurato in anni.

**Esercizio n. 1.8**

Determina i valori reali $a$ e $b$ per i quali la funzione

$$f(t) = at + \frac{b}{1+t} + \frac{3}{4}, \qquad t \geq 0,$$

rappresenta il fattore di montante di un regime di capitalizzazione.

**Esercizio n. 1.9**

Considerata la funzione

$$f(t) = \frac{5}{1-0{,}2t} - 4\,, \qquad t \geq 0\,,$$

determinare per quali valori della durata $t$, essa è il fattore di montante di un regime di capitalizzazione;
calcolare il tasso unitario di interesse e il tasso unitario di sconto associati a $f(t)$;
calcolata l'intensità istantanea di interesse, con $t = 1$, precisare se è possibile calcolarla per $t = 6$.

**Esercizio n. 1.10**

Considerata la proposizione

"una legge di capitalizzazione $f(t)$, con $0 \leqslant t < 5$, è scindibile
se e solo se
la sua intensità istantanea di interesse $g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ non dipende da $t$"

individua la risposta corretta tra quelle nel seguito presentate:

1) la proposizione è sempre vera;
2) la proposizione è vera quando $f(t)$ è continua;
3) la proposizione è vera se e solo se $f'(t)$ esiste ed è continua;
4) la proposizione è falsa, perchè se $f(t)$ è definita solo per $0 \leqslant t < 5$, allora $f(t)$ è la legge dello sconto commerciale, che non è scindibile.

**Esercizio n. 1.11**

Studiata analiticamente la funzione $v(t)$, con

$$v(t) = \frac{2}{2+3t^2}, \qquad 0 \leq t \leq 5\,,$$

determina se può essere fattore di attualizzazione associato a un fattore di montante $f(t)$ di un regime di capitalizzazione.

# 2 LA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

**Esercizio n. 2.1**

In una Nazione è in corso una polemica su come tassare ogni anno i risparmiatori che impiegano i propri risparmi in B.O.T. a 12 mesi, a un tasso di interesse (medio) del 5% annuo.

Le forze politiche $P$ propongono di tassare, con l'aliquota del 2%, sia il capitale che gli interessi, mentre, quelle $Q$ propongono un'aliquota del 20% sui soli interessi. E' poi adottata, come compromesso, un'imposta che tassa, con un'aliquota dello 0,80%, il capitale e, con un'aliquota pari a $x$%, gli interessi.

Trova i valori di $x$ che garantiscono un gettito fiscale il cui importo è compreso tra quelli ottenibili con le proposte delle forze politiche.

**Esercizio n. 2.2**

Sei mesi fa, presso la banca $A$, ho investito un capitale di importo pari a $2S$, al tasso annuo $i$. Quattro mesi fa, inoltre, presso la banca $B$, ho investito il capitale di importo pari a $S$, al tasso annuo $(i + 2\%)$.

Effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione semplice, determina $i$, sapendo che gli interessi ottenuti dalla banca $A$ superano quelli che ottenuti dalla banca $C$ in misura pari al 5% di $S$.

**Esercizio n. 2.3**

Ho diritto ai seguenti capitali:

| *capitali in* € | *epoca di scadenza* |
|---|---|
| $C_1$ | tra 2 mesi da oggi; |
| $C_2$ | tra 6 anni da oggi. |

Calcola $C_1$ e $C_2$ sapendo che il valore attuale complessivo di tali capitali è di € $1.800,00$, mentre il loro montante complessivo, tra 6 anni da oggi, e pari a € $1.908,64$; effettua le valutazioni in regime di capitalizzazione semplice, al tasso del 12% annuo.

**Esercizio n. 2.4**

Un debito, oggi contratto, è rimborsabile con quattro rate mensili $R$, ciascuna di importo pari a € $1.000,00$, la prima delle quali esigibile tra due mesi.

Calcola il valore $V_{2,5}$ delle rate tra due mesi e mezzo da oggi, operando in regime di capitalizzazione semplice, al tasso del 9% semestrale, durante i prossimi 3 mesi, e successivamente, al tasso del 21% annuo.

**NB** Considera l'anno commerciale.

**Esercizio n. 2.5**

Una rendita prevede i capitali $C_1$, fra tre mesi, e $C_2$, fra sei mesi. Sapendo che il suo valore attuale è pari a € $1.000,00$ e la scadenza media finanziaria è pari a quattro mesi, calcola $C_1$ e $C_2$.

Le valutazioni sono effettuate in regime di capitalizzazione semplice, ai tassi semestrali del 2%, per i primi cinque mesi, e, successivamente, del 3% .

**Esercizio n. 2.6**

Tre capitali sono esigibili annualmente, il primo dei quali a fine marzo 2005, ciascuno di importo € 1.000, 00. Calcola il loro valore complessivo a fine dicembre 2007 effettuando le valutazioni al tasso del 12%, annuo, in regime di capitalizzazione semplice, con interessi calcolati a fine dicembre di ogni anno e subito capitalizzati.

NB: 1 mese = $\frac{1}{12}$ di anno.

**Esercizio n. 2.7**

Calcola l'interesse $I$ prodotto dal capitale di € 5.000, 00 , impiegato per tre anni e quattro mesi, al tasso del 2,75% trimestrale, in regime di capitalizzazione semplice.

(Si vedano anche gli esercizi n. 3.2.1 e 3.3.8)

**Esercizio n. 2.8**

Cinque mesi fa ho prestato a un amico € 3.000, 00, al tasso $x$% annuo, in regime di capitalizzazione semplice, e un mese dopo ho investito presso una Società Finanziaria € 1.000, 00, al tasso $(x + 3)$% semestrale, in regime di capitalizzazione semplice. Sapendo che oggi sono terminate entrambe le operazioni e che gli interessi ottenuti dalla Finanziaria superano di € 10, 00 quelli che ho ottenuti dall'amico, calcola il tasso $x$% al quale ho prestato il denaro all'amico.

**Esercizio n. 2.9**

All'inizio del 2004 hai impiegato il capitale pari a € 10.000, 00 in un deposito a risparmio presso la banca $A$, che riconosce interessi semplici al tasso del 6% annuo netto, a patto che il capitale resti vincolato fino alla fine dell'anno; in caso di chiusura anticipata del deposito è possibile ritirare il montante maturato, dal quale viene dedotto l'importo di € 100, 00 per spese di chiusura.

A fine luglio 2004, però, la banca $B$ ti offre il tasso $i$, annuo, in regime di capitalizzazione semplice, con ritenuta fiscale del 12, 50% degli interessi maturati.

Determina i valori di $i$ che rendono conveniente la nuova proposta.

**Esercizio n. 2.10**

Il titolare di una copisteria deve rinnovare per un anno il contratto per la manutenzione delle fotocopiatrici, e deve decidere tra le seguenti alternative:

$A$ : pagare un canone quadrimestrale anticipato pari a € 2.000, 00 ;

$B$ : pagare subito, tutti i canoni dell'anno, fruendo però di una riduzione pari al 4% di tale somma.

La scelta può essere effettuata sulla base del valore attuale delle due modalità di pagamento effettuando le valutazioni a un tasso $x$, annuo semplice.

**Esercizio n. 2.11**

Determina in quanto tempo $t$, un capitale $C$ raddoppia, qualora sia impiegato al tasso del 5% annuo, in regime di capitalizzazione semplice. Esprimi $t$ in anni, mesi e giorni facendo riferimento all'anno commerciale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 3.2.4 e 3.3.9)

**Esercizio n. 2.12**

Impieghi per cinque anni, € $5.000,00$ presso una Finanziaria, in regime di capitalizzazione semplice, al tasso del 4% annuo, con ritenuta per le spese pari al 12,50% sugli interessi.

Operando in regime di capitalizzazione semplice, effettua una scelta tra le seguenti alternative che ti sono proposte:

la ritenuta è effettuata alla fine dell'investimento sull'interesse complessivo;

la ritenuta è effettuata ogni anno sugli interessi maturati nell'anno.

(Si veda anche l'esercizio n. 3.1.6)

**Esercizio n. 2.13**

Un anno e due mesi fa ho impiegato € $2.000,00$, al tasso del 4% annuo, semplice; oggi estinguo questo impiego, pagando spese di importo $S$, con $S > 0$, e reinvesto quanto incassato, allo stesso tasso, per tre anni e cinque mesi.

Determina i valori di $S$ per i quali, in regime di capitalizzazione semplice, è conveniente interrompere tale l'impiego.

# 3 LA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

## 3.1 La capitalizzazione composta per durate intere

**Esercizio n. 3.1.1**

In relazione alla seguente operazione finanziaria

| scadenze in anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| prestazioni | $1.000,00$ | | $1.000,00$ | |
| controprestazioni | | $300,00$ | | $2.068,00$ |

determina se è verificato il principio di equità finanziaria, al tasso del 10% annuo, composto, con riferimento alle epoche $t_1 = 0$ e $t_2 = 3$.

**Esercizio n. 3.1.2**

Ricevo oggi in prestito € $10.000,00$ da rimborsare con le seguenti rate:

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| rate | | | $5.000,00$ | $4.500,00$ | $4.000,00$ |

Sapendo che il creditore sostiene che il denaro è prestato al tasso del 10% annuo, composto, determina se ciò è vero.

**Esercizio n. 3.1.3**

Un operatore finanziario dispone di un capitale, di importo pari a € $100.000,00$, e lo investe per un anno come segue:

una parte in un deposito vincolato, in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 4% bimestrale;

la parte restante in un conto corrente, con interessi in regime di capitalizzazione semplice, al tasso del $4,50\%$ trimestrale.

Determina quale parte dovrà essere destinare al deposito vincolato affinché il capitale abbia un rendimento almeno pari al 20% annuo.

**Esercizio n. 3.1.4**

Un titolo con valore nominale $v.n.$ pari a € 10.000,00 , è emesso al prezzo d'emissione di 95 su 100 di $v.n.$ e sarà rimborsato sopra la pari fra tre anni; sono previste tre cedole annue, calcolate al tasso del 5% annuo.

Determina il prezzo $p$ di rimborso, su 100 di $v.n.$, sapendo che il titolo rende il 10% annuo.

**Esercizio n. 3.1.5**

Un capitale di importo pari a € $3.000,00$ è investito per due anni in regime di capitalizzazione composta, a un tasso annuo di interesse che, per il primo anno, è $i$, mentre, successivamente, viene diminuito di due punti percentuali.

Calcola $i$ sapendo che l'interesse maturato è pari a € $50,00$.

**Esercizio n. 3.1.6**

Impieghi € $5.000,00$, per cinque anni, presso una Finanziaria al tasso del 4% annuo, con ritenuta per spese pari al 12,50% sugli interessi.

Operando in regime di capitalizzazione composta, effettua una scelta tra le seguenti alternative che ti sono proposte:

la ritenuta è effettuata alla fine dell'investimento sull'interesse complessivamente maturato;

la ritenuta è effettuata ogni anno sugli interessi maturati nell'anno.

(Si veda, anche, l'esercizio n. 2.12)

**Esercizio n. 3.1.7**

Si vuole investire il capitale $S$, per due anni, in regime di capitalizzazione composta, e occorre scegliere tra le seguenti alternative:

($a$) metà di $S$ è investito al tasso $x$, annuo, con $x > 0$, e l'altra metà di $S$, al tasso $y$, annuo, con $y > 0$;

($b$) tutto $S$ è investito al tasso $\dfrac{x+y}{2}$, annuo.

Individua tutte le coppie $(x;\, y)$ di tassi $x$ e $y$, per le quali è preferibile l'alternativa $(a)$ e tutte quelle per le quali le alternative sono equivalenti.

**Esercizio n. 3.1.8**

Un capitale di importo pari a € $100,00$ è investito, per quattro anni, a un tasso di interesse $i$, annuo, con $i \in [0\%;\, 20\%]$, e permette di ottenere un interesse $I_{cs}(i)$ e $I_{cc}(i)$ nel caso si operi, rispettivamente, in regime di capitalizzazione semplice e in regime di capitalizzazione composta.
In un unico sistema di assi cartesiani, traccia i grafici di $I_{cs}(i)$ e $I_{cc}(i)$ al variare di $i$ .

## 3.2 La capitalizzazione composta: convenzione esponenziale

**Esercizio n. 3.2.1**

Calcola l'interesse prodotto dal capitale di € $5.000,00$ , impiegato per tre anni e quattro mesi, al tasso dell'11%, annuo, nominale convertibile trimestralmente, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 2.7 e 3.3.8)

**Esercizio n. 3.2.2**

Impiego i miei capitali per $t$ anni, al tasso di interesse semestrale $x$, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale; determina $x$, sapendo che il tasso di interesse istantaneo annuo è 12,36%.

**Esercizio n. 3.2.3**

Un capitale di importo pari a € $C$ è impiegato per sette anni e otto mesi, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, a un tasso annuo di interesse che, per i primi due anni, è del 6%, mentre, successivamente, viene diminuito di due punti percentuali.

Calcola $C$ sapendo che gli interessi maturati negli ultimi due anni e otto mesi sono pari a € $500,00$ .

**Esercizio n. 3.2.4**

Determina in quanto tempo $t$ un capitale $C$ raddoppia, qualora sia impiegato al tasso del 5% annuo, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale. Esprimi $t$ in anni, mesi e giorni facendo riferimento all'anno commerciale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 2.11 e 3.3.9)

**Esercizio n. 3.2.5**

Allo scopo di disporre di un capitale di importo pari a € $20.000,00$ , tra cinque anni e tre mesi, investo i seguenti capitali:

- il capitale $A$, oggi, al tasso dell'8%, annuo, soggetto a un'imposta del $12,50\%$ sugli interessi maturati alla fine di ogni anno;

- il capitale $B = 2A$, tra sei mesi, al tasso netto dell'8%, annuo, nominale convertibile trimestralmente.

Calcola $A$ e $B$ effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

**Esercizio n. 3.2.6**

Il capitale di importo pari a € $2.000,00$ è, oggi, investito al tasso annuo di interesse, del 7%, per i prossimi due anni e mezzo, e successivamente, del 6%.

Calcola il montante $M$ fra tre anni e cinque mesi, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

(Si veda anche l'esercizio n. 3.3.7)

**Esercizio n. 3.2.7**

Oggi verso presso una banca il capitale di importo $C$, allo scopo di ottenere, tra cinque anni, un montante pari a € $10.000,00$, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale. Il tasso di interesse annuo, per i primi ventidue mesi è dell'8%, mentre, per la durata residua, è pari a $i$.

Trova $C$ e $i$, sapendo che se, anziché versare oggi $C$, versassi tra due anni, presso la stessa banca, il capitale $1,17C$, riuscirei egualmente nel mio intento.

**Esercizio n. 3.2.8**

Investi il capitale di importo pari a € $5.000,00$ in un deposito a risparmio vincolato per sette anni, alle seguenti condizioni:

- per i primi tre anni e cinque mesi, il tasso di interesse è dell'11%, annuo, nominale convertibile trimestralmente, mentre, successivamente, sarà del 3% trimestrale;
- al termine dell'operazione finanziaria, l'interesse complessivamente maturato è soggetto a un'imposta del $12,50\%$;
- le valutazioni sono effettuate in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

Calcola il montante netto al termine dell'investimento.

**Esercizio n. 3.2.9**

Il capitale di importo pari a € $15.000,00$, impiegato per $t$ anni, al tasso del $3,75\%$ annuo, produce un interesse pari a € $2.530,74$.

Trova la durata $t$, da esprimere in anni, mesi e giorni (anno commerciale), sia operando in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, che in regime di capitalizzazione semplice.

**Esercizio n. 3.2.10**

Considerati i fattori di montante $f_1(t)$ e $f_2(t)$, rispettivamente, corrispondenti, al regime di capitalizzazione semplice, al tasso del 12% annuo, e al regime di capitaliz-

zazione composta, convenzione esponenziale, al tasso del 15% annuo, rappresenta graficamente, in un unico sistema di assi cartesiani $f_1(t)$ e $f_2(t)$ al variare di $t$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 2$, con $t$ espresso in anni.

Sulla base di tale grafico determina il fattore di montante che risulta più conveniente per un investitore.

## 3.3 La capitalizzazione composta: convenzione lineare

**Esercizio n. 3.3.1**

Oggi ho diritto a incassare annualmente quattro capitali, ciascuno di importo pari a € $10.000,00$, il primo dei quali tra un anno.

Calcola il valore globale del credito, tra diciotto mesi, effettuando le valutazioni al tasso dell'8% annuo composto, convenzione lineare.

**Esercizio n. 3.3.2**

Oggi ho ottenuto un prestito da rimborsare con quattro rate annue, ciascuna di importo $R =$ € $20.000,00$, la prima delle quali tra un anno. Calcola il valore delle rate di rimborso, tra due anni e cinque mesi, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 12%, annuo, nominale convertibile bimestralmente.

**Esercizio n. 3.3.3**

Un capitale di importo pari a € $1.000,00$ è impiegato, per sei anni, alle seguenti condizioni:

per i primi tre anni e sette mesi, il tasso di interesse è del 12% annuo, nominale convertibile trimestralmente;
successivamente, il tasso è del 3,36% trimestrale effettivo.

Calcola il montante netto, esigibile al termine dell'impiego, sapendo che le valutazioni sono effettuate in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare (trimestrale) e che l'imposta finale è del $12,50\%$ sull'interesse maturato nell'intero periodo di sei anni.

**Esercizio n. 3.3.4**

Una operazione finanziaria ha le seguenti caratteristiche:

| *incassi in* € | *scadenze* | *pagamenti in* € | *scadenze* |
|---|---|---|---|
| $1.000,00$ | oggi; | $1.500,00$ | tra 7 anni; |
| $200,00$ | tra 1 anno; | $3.475,00$ | tra $t$ anni . |
| $500,00$ | tra 3 anni; | | |

Calcola $t$ (da esprimere nella forma $A$ anni e $G$ giorni, su 365) in modo che l'operazione sia equa finanziariamente, effettuando le valutazioni con riferimento all'epoca

odierna, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 9% annuo.

**Esercizio n. 3.3.5**

Oggi è versato presso una banca il capitale di importo $C$, allo scopo di ottenere tra due anni un montante pari a € $100.000,00$, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, con capitalizzazione degli interessi al termine di ogni semestre. Il tasso di interesse semestrale è variabile come segue:

- tasso del 3%, per i primi otto mesi;
- tasso $x$, per la durata residua.

Trova sia $C$ che $x$, sapendo che si otterrebbe lo stesso montante, tra due anni, versando, presso la stessa banca, il capitale $1{,}05678 \cdot C$, tra un anno, anziché versare $C$ oggi.

**Esercizio n. 3.3.6**

In relazione a tre debiti, ciascuno di € $1.000,00$, con scadenza annua, il primo dei quali esigibile oggi, calcola il valore tra un anno e cinque mesi, con valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 15%, annuo, nominale convertibile bimestralmente.

**Esercizio n. 3.3.7**

Il capitale di importo pari a € $2.000,00$ è, oggi, investito al tasso annuo di interesse, del 7%, per i prossimi due anni e mezzo, e successivamente, del 6%.

Calcola il montante $M$ fra tre anni e cinque mesi, effettuando le valutazioni con le seguenti modalità:

**a)** in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare;

**b)** in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, con capitalizzazione degli interessi a fine anno.

(Si veda anche l'esercizio n. 3.2.6)

**Esercizio n. 3.3.8**

Calcola l'interesse $I$ prodotto dal capitale di € $5.000,00$, impiegato per tre anni e quattro mesi, sapendo che la capitalizzazione degli interessi avviene ogni trimestre, al tasso dell'11%, annuo, nominale convertibile trimestralmente.

(Si vedano anche gli esercizi n. 2.7 e 3.2.1)

**Esercizio n. 3.3.9**

Determina in quanto tempo $t$ un capitale $C$ raddoppia, qualora sia impiegato in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 5% annuo.
Esprimi $t$ in anni e giorni facendo riferimento all'anno civile di 365 giorni.

(Si vedano anche gli esercizi n. 2.11 e 3.2.4)

**Esercizio n. 3.3.10**

Un operatore finanziario impiega un capitale $S$, per due anni, in un deposito bancario vincolato, remunerato al tasso dell'11%, annuo, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare.

E' possibile, però, prelevare il montante solo alla fine dei due anni previsti e, nel caso invece lo si prelevi a un'epoca $t$, con $0 < t < 2$, sul montante $M(t)$, maturato all'epoca $t$, la banca imporrà una penale pari a $\frac{1}{10}$ di $S$.

Scrivi l'espressione di $M(t)$ al variare delle durate $t$, con $0 < t \leq 2$ e rappresenta graficamente la funzione $M(t)$.

**Esercizio n. 3.3.11**

Il capitale di importo pari a €$100,00$ è investito in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, per la durata di $t$ anni, con $t \in [0; 3]$, al tasso di interesse, annuo, del 10%, durante il primo anno, e dell'8%, nei successivi due anni.

Scrivi l'espressione analitica del montante $M(t)$, al variare di $t$, e traccia il relativo grafico.

**Esercizio n. 3.3.12**

In relazione a un capitale impiegato, per la durata di $t$ anni, con $t \geq 0$, in una operazione finanziaria, al tasso del 16% annuo, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, precisare per quali valori di $t$, con $t > 0$, è definibile l'intensità istantanea d'interesse. Calcolare, poi, l'intensità istantanea di interesse associata a tale regime, con $t$ uguale a due anni e sei mesi.

# 4 LO SCONTO

## 4.1 Lo sconto razionale

**Esercizio n. 4.1.1**

Le seguenti cambiali

| capitale in € | | $X$ | $3X$ | $X - 500,00$ |
|---|---|---|---|---|
| epoche in anni | 0 | 3 | 4 | 6 |

sono scontate con lo sconto razionale, al tasso di del 3%, annuo, e producono un netto ricavo pari a € $5.000,00$; determina l'importo di ciascuna cambiale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 4.2.7 e n. 4.3.1)

**Esercizio n. 4.1.2**

Oggi paghi un debito di importo pari a € $30.000,00$ rilasciando due cambiali, la prima, di importo $C$, a tre mesi, e la seconda, di importo $2C$, a sei mesi.

Sapendo che il creditore può presentarle oggi stesso allo sconto, presso due Banche che praticano lo sconto razionale, al tasso annuo, la prima, del 12% con spese fisse di € $6,00$, e la seconda, del 13% annuo senza spese, determina l'importo delle cambiali in entrambi i casi.

Precisa, poi, quale è l'alternativa di sconto preferibile per te.

**Esercizio n. 4.1.3**

Otto mesi fa ho prestato il capitale di € $25.000,00$ da rimborsare dopo quattordici mesi, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 9% annuo, nominale convertibile quadrimestralmente. Il mio credito è rappresentato da una cambiale che oggi sconto con lo sconto razionale, al tasso dell'11% annuo.

Calcola sia il netto ricavo dell'operazione di sconto, sia il tasso di interesse annuo, semplice, al quale ho impiegato il mio capitale.

**Esercizio n. 4.1.4**

Acquisto una partita di merce al prezzo di € $5.000,00$ rilasciando in pagamento una cambiale di importo $C$ con scadenza fra tre mesi.

Determina $C$ sapendo che il creditore sconterà la cambiale, oggi stesso, presso una Banca che pratica lo sconto razionale, al tasso del 12,75% annuo, e impone spese pari a € $5,00$.

(Si veda anche l'esercizio n. 4.2.11)

**Esercizio n. 4.1.5**

Oggi acquisto mobili d'ufficio al prezzo di listino di € $1.000,00$ e concordo la seguente forma di pagamento:

- subito, pago il 20% del prezzo di listino, come acconto comprensivo di spese amministrative (per apertura pratica) a mio carico;
- tra un mese, pagherò la prima di tre rate trimestrali di comune importo $R$;
- due mesi dopo il pagamento dell'ultima rata $R$, pagherò il 5% del prezzo di listino a saldo dell'acquisto.

Operando in regime di sconto razionale, al tasso dell'8% annuo, calcola l'importo della rata trimestrale $R$ in modo che la formula di pagamento accettata risulti finanziariamente equivalente al pagamento immediato del prezzo di listino.

**Esercizio n. 4.1.6**

Oggi contrai un prestito di € $10.000,00$, che rimborserai con due rate di comune importo $R$, la prima fra sei mesi e la seconda fra un anno, calcolate al tasso dell'8% annuo, semplice, a garanzia delle quali rilasci due cambiali.

Nell'ipotesi che debba sostenere spese pari a € $10,00$, all'atto dell'erogazione del mutuo, e di importo pari al 2% di $R$, al rimborso delle rate stesse, e che il creditore sconti le cambiali, al tasso di sconto razionale del 6% annuo, calcola $R$, il netto ricavo odierno del creditore, e il tasso $x$, annuo, in regime di capitalizzazione semplice, al quale tu ottieni il prestito.

**Esercizio n. 4.1.7**

Hai un credito costituito da tre cambiali, di importo $C$, $2C$ e $3C$, con scadenza, rispettivamente, fra cinque mesi, fra otto mesi e fra un anno e tre mesi. Sconti tali cambiali con lo sconto razionale alle seguenti condizioni:

la prima, al tasso del 9% annuo, sostenendo spese pari al 2% di $C$;
la seconda, al tasso del 10% annuo;
la terza, al tasso dell'8% annuo, sostenendo una spesa pari a € $10,00$.

Sapendo che il netto ricavo, odierno, è di € $12.000,00$, calcola l'importo di ciascuna cambiale.

## 4.2 Lo sconto commerciale

**Esercizio n. 4.2.1**

Rappresenta in un unico grafico le due funzioni $h(t)$ e $k(t)$ che, al variare della durata $t$, espressa in anni, nei regimi che seguono, descrivono lo sconto di un capitale unitario:

- regime di sconto commerciale, al tasso di sconto $d = 5\%$ annuo;
- regime di sconto razionale, al tasso di interesse $i = 8\%$ annuo.

**Esercizio n. 4.2.2**

In relazione ai capitali $C_1$ e $C_2$ è noto quanto segue:

| *capitali in* € | *epoca di scadenza* |
|---|---|
| $C_1$ | tra 2 mesi da oggi; |
| $C_2$ | tra 6 anni da oggi; |

il loro valore attuale complessivo è pari a € $28.600,00$, mentre il loro montante complessivo (riferito alla scadenza di $C_2$) è pari a € $30.416,67$.

Calcola $C_1$ e $C_2$ sapendo che le valutazioni sono effettuate in regime di sconto commerciale, al tasso di sconto del 12% annuo.

**Esercizio n. 4.2.3**

In relazione ai capitali $C_1$ e $C_2$ è noto quanto segue:

| *capitali in* € | *epoca di scadenza* |
|---|---|
| $C_1$ | fra 1 mese da oggi; |
| $C_2$ | fra 3 anni da oggi; |

il loro valore complessivo, tra due mesi da oggi, è pari a € $7.940,00$ e, inoltre, si ha $C_1 = 0{,}985 \cdot C_2$.

Calcola $C_1$ e $C_2$ sapendo che le valutazioni sono effettuate in regime di sconto commerciale, al tasso di sconto del 18% annuo.

**Esercizio n. 4.2.4**

Due mesi fa ho venduto merci concordando il prezzo di € $10.000,00$, con pagamento in contanti. Poichè il mio cliente non aveva immediata disponibilità di denaro, ho accettato una sua cambiale a tre mesi, il cui valore nominale $C$ mi avrebbe consentito, scontando subito la cambiale, al tasso di sconto commerciale del 9% annuo, di ottenere un netto ricavo pari a € $10.000,00$. Calcola $C$.

Oggi presento la cambiale allo sconto e mi si offrono le seguenti modalità:

- la Banca $A$ applica un tasso di sconto commerciale $d$, annuo, senza spese;
- la Banca $B$ applica un tasso di sconto commerciale $\frac{7}{8}d$, annuo, con spese pari allo $0,15\%$ del valore nominale.

Sapendo che in entrambi i casi ottengo lo stesso netto ricavo, trova il tasso di sconto commerciale $d$.

**Esercizio n. 4.2.5**

Sette mesi fa ho prestato € $10.000,00$ a un amico, con l'intesa che, decorso un tempo $t$, egli mi avrebbe reso il capitale prestato, unitamente agli interessi calcolati al tasso del 6% annuo, semplice.

Oggi devo cedere il mio credito a una Banca, che, in base al tasso di sconto commerciale del 12% annuo, mi dà un netto ricavo pari a € $9.828,00$.

Calcola la durata $t$ del prestito esprimendola in anni e mesi, con riferimento all'anno commerciale.

**Esercizio n. 4.2.6**

Una Finanziaria sconta le cambiali ai propri clienti, al tasso di sconto commerciale $x$, annuo, con riferimento all'anno commerciale. Con questa operazione la Finanziaria guadagna il 16% annuo sui soldi che presta ai clienti (le valutazioni sono effettuate in regime di capitalizzazione semplice, con riferimento all'anno solare).

Calcola il tasso di sconto $x$ che la Finanziaria dovrà applicare a cambiali in scadenza dopo trenta giorni.

**Esercizio n. 4.2.7**

Le seguenti cambiali

| capitale in € | | $X$ | $3X$ | $X - 500,00$ |
|---|---|---|---|---|
| epoche in anni | 0 | 3 | 4 | 6 |

sono scontate con lo sconto commerciale al tasso del 3% annuo, e producono un netto ricavo pari a € $5.000,00$; determina l'importo di ciascuna cambiale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 4.1.1 e n. 4.3.1)

**Esercizio n. 4.2.8**

All'inizio dell'anno, un'impresa agricola si procura il capitale $S$ per l'acquisto di sementi rilasciando cambiali a tre mesi, valutate al tasso di sconto commerciale del 7%

annuo. A scadenza rinnova tali cambiali, alle stesse condizioni, e così di seguito, di trimestre in trimestre, fino alla fine dell'anno, quando salda il suo debito grazie alla vendita del raccolto.

Determina il tasso di interesse $x$ annuo al quale l'impresa si procura il denaro.

**Esercizio n. 4.2.9**

Vuoi scontare cambiali, con scadenza a 1, 2, 3 e 4 mesi, presso una Finanziaria e ti vengono proposte due modalità di sconto:

regime di sconto razionale, al tasso di interesse del 15% annuo;

regime di sconto commerciale, al tasso di sconto del 14,50% annuo.

Determina l'alternativa migliore per te a seconda della scadenza delle cambiali.

**Esercizio n. 4.2.10**

Sapendo che la Banca sconta cambiali, con scadenza fra tre mesi, al tasso di sconto commerciale del 13% annuo, determina il tasso trimestrale al quale in effetti investe il proprio denaro.

**Esercizio n. 4.2.11**

Acquisto una partita di merce al prezzo di ₠ $5.000,00$ rilasciando in pagamento una cambiale di importo $C$ con scadenza fra tre mesi.

Determina $C$ sapendo che il creditore sconterà la cambiale, oggi stesso, presso una Banca che pratica lo sconto commerciale, al tasso del 12,75% annuo, e impone spese pari a ₠ $5,00$.

(Si veda anche l'esercizio n. 4.1.4)

## 4.3 Lo sconto composto

**Esercizio n. 4.3.1**

Le seguenti cambiali

| capitale in ₠ | | $X$ | $3X$ | $X - 500,00$ |
|---|---|---|---|---|
| epoche in anni | 0 | 3 | 4 | 6 |

sono scontate con lo sconto composto al tasso del 3% annuo, e producono un netto ricavo pari a ₠ $5.000,00$; determina l'importo di ciascuna cambiale.

(Si vedano anche gli esercizi n. 4.1.1 e n. 4.2.7)

**Esercizio n. 4.3.2**

Ho in portafoglio cambiali per un capitale complessivo di ₠ $100.000,00$, alcune con scadenza fra tre mesi e le altre con scadenza fra sei mesi; oggi le sconto tutte, come segue:

- presso una Banca, sconto le cambiali che scadono fra tre mesi, per un capitale complessivo, a scadenza, di ₠ $A$; tale Banca applica il tasso di sconto commerciale del 18%, annuo, e non trattiene spese;

- presso una Finanziaria, sconto le rimanenti cambiali, che scadono tra sei mesi; tale Finanziaria deduce dal capitale a scadenza sia lo sconto composto, al tasso mensile, equivalente al 17% annuo, sia le spese pari allo $0,50\%$ dello stesso capitale.

Sapendo che a seguito di tali operazioni ottengo un netto ricavo complessivo pari a ₠ $93.400,00$, calcola $A$.

**Esercizio n. 4.3.3**

Quattro anni fa ho prestato il capitale di importo pari a ₠ $10.000,00$ a un amico, con l'intesa della restituzione del prestito dopo $a$ anni, unitamente agli interessi, valutati al tasso del 4% annuo semplice.

Sapendo che oggi cedo il mio credito a una Banca che me lo sconta al tasso del 5% annuo composto, e che ricevo una somma pari a ₠ $10.447,02$, scrivi l'equazione che permette di trovare $a$.

Determina, poi, il tasso, annuo composto, al quale ho investito il mio denaro.

**Esercizio n. 4.3.4**

Fra un anno avrò un esborso $E$ pari a ₠ $5.000,00$ cui farà seguito, dopo due anni, un incasso pari a ₠ $5.700,00$. Gestisco tale operazione finanziaria come segue:

sconto l'incasso, cui ho diritto, al tasso $i$ annuo composto;

utilizzo il netto ricavo per costituire $E$ presso una Banca, al tasso del 4% annuo.

Calcola il tasso $i$ sapendo che, oggi, ottengo dall'operazione un guadagno pari a ₠ $100,00$.

**Esercizio n. 4.3.5**

Due anni e otto mesi fa ho impiegato ₠ $5.000,00$ al tasso del 5% annuo, nominale convertibile semestralmente. Un anno fa ho estinto questo impiego incassandone il montante $M$ che ho impiegato subito, vincolato per quattro anni, al tasso del 6%, annuo composto, per ottenere una somma $S$.

Sapendo che oggi sconto $S$, al tasso di sconto del 7%, annuo composto, determina il netto ricavo odierno e il tasso annuo di rendimento del capitale impiegato, con riferimento al regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

**Esercizio n. 4.3.6**

Posseggo un titolo a reddito fisso che, al tasso del 3% annuo, garantisce una cedola di importo $C$, esigibile fra un anno, fra due anni e fra tre anni; sapendo che scontate tali cedole, al tasso di sconto del 4%, annuo composto, ottengo un netto ricavo odierno pari a ₠ $1.000,00$, calcola l'importo di $C$ e il valore nominale del titolo.

**Esercizio n. 4.3.7**

Ho diritto a incassare i seguenti capitali come specificato

| *importo in* ₠ | *scadenza* |
|---|---|
| $2.500,00$ | 1 anno e 5 mesi; |
| $3.000,00$ | 2 anni e 3 mesi; |
| $3.500,00$ | 3 anni e 7 mesi; |

determina la somma scontata complessiva che ottengo oggi, al tasso dell'8% annuo, nominale convertibile trimestralmente.

# 5 LE RENDITE

**Esercizio n. 5.1**

Una rendita prevede quattro rate mensili, ciascuna di importo pari a €$100,00$ , la prima delle quali scade tra due mesi da oggi. Calcola il valore della rendita fra tre mesi e mezzo da oggi, in regime di capitalizzazione semplice, ai tassi semestrali del 6%, nei primi tre mesi, e del 9%, per la durata residua (fai riferimento all'anno commerciale).

**Esercizio n. 5.2**

Una rendita prevede tre rate, semestrali, ciascuna di importo pari a €$100,00$, la prima delle quali scade tra un anno. Calcola il valore della rendita due mesi prima della scadenza dell'ultima rata, facendo valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso del 12%, annuo, nominale convertibile semestralmente.

**Esercizio n. 5.3**

Una rendita, da valutare in regime di capitalizzazione composta, al tasso $i$ , annuo, prevede la rata $R_1$, tra un anno, e la rata $R_2$, tra due anni . Calcola $R_1$, $R_2$ e $i$, sapendo quanto segue:

***a***) la somma delle rate della rendita è €$5.400,00$ ;

***b***) il valore attuale della rendita è €$4.000,00$ ;

***c***) il montante della rendita (riferito alla scadenza di $R_2$) è € $5.760,00$ .

**Esercizio n. 5.4**

Due anni fa avevo diritto a riscuotere una rendita immediata, posticipata, caratterizzatata dalle seguenti rate semestrali:

le prime quattro, di importo €$1.000,00$ ;

le successive tre, di importo €$500,00$ ;

le ultime due, di importo €$2.000,00$ .

Oggi, appena incassata la relativa rata, preferisco cedere le rimanenti rate a una Finanziaria, in cambio dell'incasso immediato di un capitale di importo pari a €$2R$, e del diritto a una rendita perpetua, immediata, a rate annue, posticipate, di importo pari a €$R$.

Calcola $R$, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 10%, annuo, nominale convertibile semestralmente.

**Esercizio n. 5.5**

Dimostra che, comunque scelti l'intero $n$, con $n > 1$, e il tasso $i$, positivo, risulta

$$i + \sigma_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i} \, .$$

**Esercizio n. 5.6**

Due anni fa hai contratto un mutuo di importo pari a € $100.000,00$, da ammortizzare, al tasso $i$, annuo composto, con una rendita immediata, costituita da sei rate, annue, posticipate, in progressione geometrica di ragione $1 + i$.

Con $i = 6\%$, calcola la prima e l'ultima rata.

**Esercizio n. 5.7**

Oggi hai diritto a una rendita perpetua, immediata, a rate annue, anticipate, le prime sei di importo pari a € $100,00$, e le successive di importo pari a € $200,00$.

Calcola il valore della rendita fra tre anni, effettuando le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo, del 3%, nei primi tre anni, e del 4%, nei successivi.

**Esercizio n. 5.8**

Una rendita immediata, certa, perpetua, ha le seguenti caratteristiche:

- le rate sono annue, posticipate, e la prima è di importo € $2.500,00$;
- le rate sono in progressione geometrica di ragione 1,18.

Trova i valori del tasso $i$, annuo, composto, con $i > 0$, per i quali il valore attuale della rendita **NON** è definito.

**Esercizio n. 5.9**

Una rendita perpetua prevede rate annue, ciascuna di importo pari a € $100,00$, la prima delle quali esigibile tra due anni. Calcola il valore della rendita tra due anni e mezzo da oggi, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, al tasso del 14%, annuo, nominale convertibile semestralmente nei primi tre anni, poi al tasso semestrale equivalente al 10,25% annuo.

**Esercizio n. 5.10**

Una rendita perpetua ha rate annue che aumentano in progressione geometrica di ragione 1,12, con prima rata, di importo $S =$ € $1.000,00$, esigibile tra due anni.

Calcola il valore della rendita tra cinque anni, in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 15% annuo.

**Esercizio n. 5.11**

Una rendita immediata, costituita da dieci rate annue, posticipate, ciascuna di importo $R$, ha valore attuale pari a € $5.000,00$; determina $R$ effettuando le valutazioni al tasso di interesse annuo, composto, del 4%, per i primi quattro anni, e del 5% durante gli anni successivi.

**Esercizio n. 5.12**

Una rendita perpetua prevede rate triennali di importo pari a € $700,00$, la prima delle quali scade tra cinque anni. Calcola il valore della rendita tra nove anni, con valutazioni in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 4% annuo, nominale convertibile semestralmente.

**Esercizio n. 5.13**

Una rendita immediata costituita da $n$ rate annue, posticipate, ciascuna di importo pari a € $3.500,00$, valutata al tasso $i$, annuo composto, ha valore attuale uguale a quello di una rendita immediata di ugual durata, con rate semestrali, posticipate, ciascuna di importo pari a € $1.720,00$, valutata al tasso $i_2$, semestrale composto. Determina i tassi ai quali sono effettuate le valutazioni.

# 6 LA COSTITUZIONE DI UN CAPITALE

**Esercizio n. 6.1**

Oggi, un operatore finanziario effettua, presso una Banca, il primo di sei versamenti annui, ciascuno di importo $S =$ € $1.000,00$, allo scopo di costituire, tra sei anni, un capitale $C$.

Calcola $C$, sapendo che la Banca opera in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 9% annuo.

Nell'ipotesi, poi, che, appena versata la terza rata, il tasso venga ridotto al 7% annuo, e che l'operatore decida di ottenere $C$ con tre anni di ritardo sul programma iniziale e, inoltre, di far seguire alle tre rate di importo $S$ già versate, altre sei rate di importo $R$, calcola $R$. In tale ipotesi, infine, scrivi l'espressione che permette di calcolare il tasso al quale, per l'intera durata, in effetti sarà remunerato il capitale versato.

(Si veda anche l'esercizio n. 9.7)

**Esercizio n. 6.2**

Voglio costituire presso una Banca, tra dieci anni, un capitale $C$ e, allo scopo, concordo il versamento di otto rate annue, la prima delle quali fra un anno. Calcola $C$, sapendo che l'importo $R$ di ciascuna rata è pari a € $100,00$, e che la Banca opera in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 6%, annuo.

Nell'ipotesi che appena versata la terza rata, il tasso venga ridotto al 4% annuo, e io decida di raggiungere lo stesso obiettivo, con un anno di anticipo sul programma iniziale, e faccia seguire alle tre rate di importo € $100,00$, già versate, altre tre rate biennali di importo $R'$, la prima delle quali è prevista due anni dopo la variazione, calcola $R'$ e scrivi l'espressione che permette di calcolare il tasso annuo al quale, in effetti, sarà costituito il capitale.

(Si veda anche l'esercizio n. 9.8)

**Esercizio n. 6.3**

Cinque anni fa avevo programmato di costituire il capitale di € $100.000,00$ in dieci anni, con una rendita immediata, costituita da dieci rate annue, posticipate, di comune importo $R$, con valutazioni effettuate in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 10% annuo. Calcola la rata $R$.

Oggi, appena pagata la quinta rata, devo rivedere il mio programma, in quanto il tasso viene ridotto all'8% annuo e, inoltre, il capitale da costituire aumenta a € $118.000,00$.

Decido allora di adeguare il mio programma prevedendo rate future in progressione aritmetica, con prima rata $R$ e ragione € $15.000,00$, mentre l'epoca di costituzione è eventualmente da stabilire rispetto a quanto previsto nel piano originario.

Calcola il fondo di costituzione ogni anno, da oggi in poi, e individua in quanti anni raggiungerò il mio nuovo obiettivo. Se $m$ anni sono pochi e $m+1$ anni sono troppi, determina se è possibile raggiungere l'obiettivo versando $m$ nuove rate e lasciando impiegato il fondo (in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare) per ulteriori $g$ giorni ($0 < g < 365$), nel qual caso trova $m$ e $g$. Nel caso ciò non sia sufficiente, calcola il versamento complementare $R_m^c$ da effettuarsi tra $m$ anni.

**Esercizio n. 6.4**

Effettuo $n$ versamenti annui, posticipati, ciascuno di importo pari a € $2.000,00$, sui quali sono riconosciuti interessi al tasso dell'8% annuo, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare.

Sapendo che, decorsi $g$ giorni ($0 < g < 365$) dopo l'ultimo versamento, ritiro il capitale costituito, pari a € $21.760,00$, trova $n$ e $g$.

**Esercizio n. 6.5**

Impiego oggi il capitale di importo pari a € $12.000,00$, per nove mesi, in regime di capitalizzazione semplice, a un tasso variabile, di mese in mese, in progressione geometrica. Sapendo che il tasso mensile è dello $0,25\%$, nel primo mese, e dello $0,50\%$, nell'ultimo, calcola l'importo del capitale costituito in tal modo.

**Esercizio n. 6.6**

Il giorno 1 gennaio di quest'anno, disponevi di un capitale di € $13.500,00$ e hai acquistato titoli, appena emessi, con le seguenti caratteristiche:

durata 3 anni;

valore nominale pari a € $1.000,00$ cadauno;

cedole semestrali, valutate al tasso del 10% annuo, nominale convertibile semestralmente, esigibili a fine giugno e a fine dicembre;

rimborso alla pari;

prezzo d'acquisto (comprensivo di tutti gli oneri accessori) pari a 97 per ogni 100 di valore nominale.

Hai depositato su un conto corrente bancario quanto ti è rimasto dall'acquisto dei titoli, e sullo stesso conto sono depositate le cedole via via incassate e il capitale di rimborso.

Sapendo che il conto viene remunerato al tasso del 2% semestrale composto, determina l'importo del capitale che risulta costituito all'epoca di rimborso dei titoli.

Determina, infine, il tasso annuo, composto, al quale è effettuata la costituzione di capitale.

**Esercizio n. 6.7**

Allo scopo di costituire un capitale pari a € $15.000,00$, tra cinque anni, opero nel seguente modo:

- investo, subito, il capitale $A$, al tasso dell'8% annuo, composto, soggetto a una imposta del 30%, da pagarsi a ogni capitalizzazione;
- investirò, fra sei mesi, il capitale $B = 2A$, al tasso dell'8% annuo, nominale convertibile semestralmente.

Calcolati $A$ e $B$, determina il tasso annuo, di costituzione del capitale, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

# 7 I PRESTITI INDIVISI

## 7.1 L'ammortamento graduale

**Esercizio n. 7.1.1**

Una Banca concede oggi un prestito di importo $D_0 =$ € $90.000,00$, da ammortizzare in sei anni con una rendita immediata costituita da sei rate annue, posticipate, alle seguenti condizioni:

- le prime tre quote capitale hanno un comune importo di € $20.000,00$;
- le ultime tre rate sono di importo tra loro uguale;
- il tasso d'interesse è del 6% annuo composto;
- l'ultima quota capitale (e perciò anche l'ultima rata) è arrotondata in modo da azzerare il debito residuo finale.

Redigi il piano d'ammortamento.

**Esercizio n. 7.1.2**

Quattro anni fa è stato contratto un mutuo di importo pari a € $100.000,00$, da ammortizzare al tasso $i$ annuo, composto, con una rendita immediata, costituita da sette rate annue, posticipate, in progressione geometrica di ragione $1 + i$.

Con $i = 10\%$, calcola l'importo della prima rata;

determina, poi, i tassi $i$, con $i > 0$, in corrispondenza ai quali il valore oggi del prestito è almeno pari al debito residuo odierno.

**Esercizio n. 7.1.3**

Un mutuo di importo incognito $M$ viene ammortizzato con tre rate, previste alle scadenze $t_1$, $t_2$ e $t_3$, espresse in trimestri, al tasso del 12% annuo, nominale, convertibile trimestralmente. Nel caso sia noto quanto segue:

$$\begin{aligned} &t_1 = 2\,\text{trimestri}, && C_1 = \text{€}\ 200.000,00\,, && R_1 = \text{€}\ 260.900,00\,, \\ &I_2 = \text{€}\ 74.181,60, && D_2 = \text{€}\ 100.000,00, \\ &I_3 = \text{€}\ 3.000,00\,, \end{aligned}$$

trova $M$, $t_2$ e $t_3$, e redigi l'intero piano d'ammortamento.

**Esercizio n. 7.1.4**

Il prestito indiviso di importo € $S$ viene ammortizzato in $n$ anni mediante le rate annue $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$. Nell'ipotesi siano assegnati l'importo $S$, il tasso di interesse $i$, annuo, e tali rate, la prima quota capitale $C_1$, come noto, può essere ottenuta come segue:

$$C_1 = R_1 - I_1 = R_1 - iS\,.$$

Dimostra che è possibile ottenere le quote capitale $C_k$, con la relazione ricorrente

$$C_k = C_{k-1}(1+i) + R_k - R_{k-1}\,, \qquad \text{con } k = 2, 3, ..., n\,.$$

**Esercizio n. 7.1.5**

Un mutuo di importo pari a € 25.000,00 viene ammortizzato con una rendita immediata costituita da quattro rate annue, posticipate, di importo $R$, le prime due, e $2R$, le successive. Il tasso di interesse annuo composto, utilizzato per le valutazioni, è del 9% nominale convertibile quadrimestralmente, per i primi due anni, e del 7% effettivo, per i rimanenti anni.

Calcolate le rate e il debito residuo, all'epoca $t = 2$, calcola, alla stessa epoca, il valore del prestito, al tasso del 5% annuo, composto.

**Esercizio n. 7.1.6**

Considerato un prestito indiviso da ammortizzare, al tasso $i$, annuo composto, con una rendita immediata costituita da $n$ rate annue, positive, posticipate, indicato con $D_t$ il debito residuo all'epoca $t$, appena pagata la $t$-esima rata, e con $V_t(x)$ il valore del prestito, alla stessa epoca, valutato al tasso $x$, annuo composto, determina i tassi $x$ per i quali risulta

$$D_t > V_t(x), \qquad \text{con } t \in \{0, 1, ..., n-1\}\,.$$

## 7.2 L'ammortamento a due tassi

**Esercizio n. 7.2.1**

Un prestito di importo $S$ è rimborsato con il metodo americano in $n$ anni, con quote interesse annue, valutate al tasso $x$, annuo, ed $n$ versamenti $A$ di costituzione, annui, costanti, valutati al tasso $y$, annuo. Confronta, con tali tassi, il tasso $z$, annuo composto, al quale in effetti è rimborsato $S$, sia nel caso valga $x = y$ e sia nel caso valga $x > y$ .

**Esercizio n. 7.2.2**

Il debito di importo $S$, pari a € $1.000,00$ , oggi contratto, è ammortizzato con il rimborso dell'intero importo $S$, tra otto anni, e il pagamento delle quote interesse, tra 2, 4, 6, e 8 anni, calcolate in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 6% annuo.

Il capitale $S$, è costituito presso una Banca, che opera in regime di capitalizzazione composta, al tasso del 2% annuo, effettuando un versamento di importo $A$, fra un anno, $A$ fra tre anni, e $2A$ fra cinque anni.

Calcola le quote interesse, l'importo dei versamenti effettuati presso la Banca e le rate a disposizione del prestito.

(Si veda, anche, l'esercizio n. 9.2)

**Esercizio n. 7.2.3**

Un'impresa ammortizzerà, in cinque anni, un prestito di € $100.000,00$, oggi concessole, come segue:

- tra 1, 3, 4 e 5 anni, pagherà quote interesse, calcolate al tasso annuo, composto, del 15%, per i primi 2 anni, e poi del 18% ;
- presso una Banca costituirà il capitale da restituire al termine del prestito, versando tra due anni un capitale di importo $A$ e tra quattro anni, di importo $2A$; la Banca opera in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo del 6%, per i primi tre anni, e poi del 7%.

Calcola le quote interesse, l'importo dei versamenti effettuati presso la Banca e l'importo delle rate complessivamente a disposizione del prestito, sapendo che la Banca esigerà, a scadenza, per spese notarili e amministrative, il 2% del montante accumulato.

(Si veda, anche, l'esercizio n. 9.5)

**Esercizio n. 7.2.4**

Contrai un mutuo di € $10.000,00$ da ammortizzare, in sei anni, come segue:

- versi gli interessi tra due, quattro e sei anni, calcolati al tasso del 10% annuo, composto;
- costituisci il capitale da restituire a scadenza, e fai fronte alle spese, versando un capitale di importo $A$, alla fine del terzo anno, nonché un capitale di importo doppio, dopo altri due anni; tali capitali sono valutati al tasso del 4% semestrale, composto.

Calcola l'importo delle rate a disposizione del prestito e il tasso annuo, composto, al quale ottieni il mutuo sapendo che la Banca tratterrà, a scadenza, per spese notarili e amministrative, $\frac{1}{100}$ del montante accumulato.

## 7.3 L'ammortamento a rate costanti

### Esercizio n. 7.3.1

Il debito pubblico di una Nazione è all'incirca, pari a 25.000 milioni di euro e il Ministro del Tesoro contrae un debito di tale importo con la Banca Mondiale, da ammortizzare mensilmente con il metodo francese, in trent'anni, al tasso del 6%, annuo, nominale convertibile mensilmente.

Nell'ipotesi che la rata mensile venga suddivisa in parti uguali tra due milioni di contribuenti, con trattenuta diretta $T$ sullo stipendio mensile, calcola $T$.

### Esercizio n. 7.3.2

Un prestito di € $10.000,00$ viene ammortizzato con una rendita immediata, costituita da cinquanta rate semestrali, posticipate, di comune importo $R$, da valutare al tasso del 7% annuo, nominale, convertibile semestralmente.

Calcola la quota capitale $C_{37}$ e il debito residuo $D_{37}$, appena pagata la trentasettesima rata.

### Esercizio n. 7.3.3

Un mutuo di importo pari a € $100.000,00$ viene ammortizzato con una rendita immediata, costituita da trenta rate annue, posticipate, di comune importo $R$. Sapendo che le valutazioni sono effettuate in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo, del 9%, per i primi dodici anni, e del 7%, sucessivamente, calcola la rata di ammortamento.

Nell'ipotesi, poi, che sia stata appena pagata la ventitreesima rata, calcola la nuda proprietà del prestito, al tasso del 5%, annuo, composto.

### Esercizio n. 7.3.4

Due anni fa è stato contratto un mutuo di € $10.000,00$, da ammortizzare secondo il metodo francese, con dieci rate annue, di comune importo $R$, valutate al tasso del 10%, annuo, composto. Calcola l'importo $R$ della rata di ammortamento.

Oggi, appena pagata la seconda rata, il rimborso del prestito è modificato come segue:

- la terza rata avrà un importo $R_3$ tale da garantire un debito residuo $D_3$ di importo pari alla metà del mutuo stesso;
- le restanti rate saranno di comune importo $R'$.

Calcola $R_3$ ed $R'$ tenendo conto che il creditore, accettando queste varianti, impone che il tasso di interesse sia del 12%, a decorrere da oggi.

(Si veda anche l'esercizio n. 9.4)

**Esercizio n. 7.3.5**

Un prestito di importo pari a € $5.000,00$ è ammortizzato con una rendita immediata costituita da diciotto rate $R$, annue, posticipate, calcolate al tasso $i$, annuo, composto, con $i > 0$. Sapendo che il debito residuo il nono anno è pari al 72% del debito iniziale, trova $i$.

**Esercizio n. 7.3.6**

Contrai un mutuo di € $100.000,00$, che rimborsi in dieci anni con il metodo francese, al tasso del 9% annuo, composto, come segue:

- all'atto dell'erogazione del mutuo, viene trattenuta la somma di € $10.000,00$, per spese di vario tipo (notarili, catastali, imposta di registro, perizie);
- la rata annua di rimborso viene suddivisa in quattro pagamenti uguali tra loro, da effettuare al termine di ogni trimestre, su ognuno dei quali grava una spesa addizionale di € $50,00$, per la gestione del mutuo da parte del creditore.

Calcolati gli importi delle rate di rimborso e dei pagamenti effettuati, calcola il tasso al quale, in effetti, hai contratto il prestito.

**Esercizio n. 7.3.7**

Un mutuo è rimborsato con una rendita immediata costituita da tre rate annue, posticipate, al tasso d'interesse $i$ annuo, composto, e le quote capitali aumentano in progressione geometrica di ragione $1,18$.

Sulla base di quanto indicato, precisare se il mutuo è rimborsato con il metodo francese.

**Esercizio n. 7.3.8**

Acquisto oggi dei capannoni industriali, al costo di € $100K$, con $K > 0$, ma poichè dispongo solo di € $40K$, contraggo un mutuo da rimborsare, con una rendita immediata costituita da sei rate annue, costanti, valutate al tasso del 9% annuo; tra dieci anni venderò i capannoni a un prezzo ottenuto da quello di acquisto, rivalutato di anno in anno, al tasso di rivalutazione del $4,5\%$ annuo, e pagherò un'imposta del 15% su quanto ricavato.

Calcola, in funzione di $K$, l'importo dei capitali relativi a tale acquisto, e, successivamente, scrivi l'equazione che permette di ottenere il tasso, annuo composto, di investimento dell'operazione.

**Esercizio n. 7.3.9**

Il prestito di € $10.000,00$ viene ammortizzato con la cosiddetta *regola del 10-10-10*, cioè come segue:

è restituito, subito, un capitale pari a € $1.000,00$;

sono rimborsate dieci rate, mensili, posticipate, ciascuna di importo pari a € $1.000,00$.

Calcola il tasso $i$, annuo composto, che indica il costo del denaro (il TAEG, cioè il *tasso annuo effettivo globale*) dell'operazione.

## 7.4 L'ammortamento a quote capitale costanti

**Esercizio n. 7.4.1**

Contrai un mutuo di € $100.000,00$, che rimborsi in dieci anni, con dieci rate posticipate, al tasso dell'8% annuo; sapendo che la quota capitale, annua, è costante, determina gli elementi del piano d'ammortamento del prestito.

**Esercizio n. 7.4.2**

Oggi contrai un mutuo di € $3.000,00$, che rimborsi in tre mesi, al tasso mensile del 2%, per il primo mese, e, rispettivamente, del 3% e del 4% nei due mesi successivi; sapendo che la quota capitale, mensile, è costante, e che oggi sostieni spese pari all'1% del prestito, determina gli elementi del piano d'ammortamento e il tasso mensile di costo (in regime di capitalizzazione semplice) del denaro avuto in prestito.

**Esercizio n. 7.4.3**

Ho ottenuto un prestito da rimborsare con il metodo uniforme, a rate annue. Noti i seguenti elementi del piano d'ammortamento:

$$I_3 = € \ 300,00\,, \qquad C_2 = € \ 1.000,00\,, \qquad D_4 = € \ 1.000,00\,,$$

determina tutti i rimanenti elementi.

**Esercizio n. 7.4.4**

Ho ottenuto un prestito da rimborsare con il metodo uniforme, con rate annue, valutate al tasso del 9% annuo.

Sapendo che $R_2 = € \ 3.175,00$ e $R_4 = € \ 2.725,00$, determina i rimanenti elementi del piano d'ammortamento.

**Esercizio n. 7.4.5**

Presti oggi a un amico € $100.000,00$ che egli ti rimborserà con una rendita immediata costituita da cinque rate, annue, posticipate, da valutare in regime di capitalizzazione composta, con uno dei seguenti metodi:

**A**) metodo francese, al tasso $i = 10\%$, annuo;

**B**) metodo italiano al tasso $j = 11\%$, annuo.

In ogni caso reinvestirai ogni rata, fino alla fine del quinto anno, con l'acquisto dei seguenti certificati di credito:

biennali, all'8% annuo, composto;
annuali, al 7% annuo.

Sulla base del capitale finale $M$ che, tra cinque anni, avrai complessivamente a disposizione, decidi quale sia, tra $A$ e $B$, il rimborso per te più conveniente.

Determina, inoltre, il tasso $x$, annuo, composto, al quale in effetti hai investito il denaro.

Si assuma, poi, che il debitore preferisca il metodo $A$, in quanto, in tal caso, fruisce di uno speciale contributo regionale in conto interessi. Egli, per tale motivo, nell'ipotesi il metodo $B$ sia da te preferito a quello $A$, è disposto a concedere una maggiorazione del tasso $i$.

Scrivi l'espressione che permette di calcolare i valori del tasso $i$ per i quali il metodo $A$ risulta più conveniente per te.

(Si veda anche l'esercizio n. 9.9)

**Esercizio n. 7.4.6**

Ammortizzo un prestito di importo pari a € $10.000,00$, al tasso del 6%, annuo composto, con una rendita immediata costituita da $n$, con $n > 1$, rate annue posticipate. Indicate con $R_k$ la $k$-esima rata dell'ammortamento italiano e con $R$ la rata relativa all'ammortamento francese, determina quale delle seguenti relazioni è vera:

**a)** si ha $R_1 < R$;

**b)** si ha $R_1 > R$, solo per alcuni valori di $n$;

**c)** si ha $R_k < R$, per ogni $k$.

**Esercizio n. 7.4.7**

Sette anni fa ho contratto un prestito di importo pari a € $10.000,00$, da rimborsare in dieci anni, con il metodo italiano, al tasso del 10% annuo, con dieci rate annue posticipate. Oggi, appena versata la rata, decido di estinguere il debito anticipatamente versando il valore odierno del prestito valutato al tasso $x$, annuo composto. Sapendo che tale valore del prestito supera il debito residuo del suo 5%, determina il tasso $x$.

# 8 I PROGETTI ECONOMICO-FINANZIARI

**Esercizio n. 8.1**

Con riferimento al progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $+100,00$ | $-130,00$ | $+50,00$ | $-50,00$ |

calcola la scadenza media aritmetica sia dei costi che dei ricavi e la durata media finanziaria (duration) dei costi, al tasso del 10% annuo, composto.

Esprimi tali scadenze nella forma $a$ anni e $g$ giorni, su 365, con arrotondamento al giorno più prossimo.

**Esercizio n. 8.2**

Considerato il seguente progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $-100,00$ | $+360,00$ | $-559,00$ | $+329,00$ |

calcola

- la scadenza media aritmetica dei costi;
- la scadenza media finanziaria dei ricavi al tasso del 6% annuo, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

Esprimi tali epoche nella forma $a$ anni e $g$ giorni, su 365, con arrotondamento al giorno più prossimo.

**Esercizio n. 8.3**

**a**) Scrivi le proprietà *minimali e addizionali* che caratterizzano una funzione che associ un *indice di preferenza* (o *di scelta*) a un progetto.
**b**) Come noto, i criteri per la valutazione di un progetto possono essere classificati come criteri *assoluti* e criteri *relativi*, caratterizza, quindi, tali proprietà.
**c**) Precisa, infine, se il criterio del TRM è un criterio assoluto, oppure relativo.

**Esercizio n. 8.4**

Fai un confronto tra l'*indice di profittabilità* (o criterio del *rapporto benefici/costi*) e ciascuno dei seguenti criteri:
criterio del REA;
criterio del tasso interno TI.

**Esercizio n. 8.5**

In riferimento a un progetto $A$ e a un relativo progetto integrativo $A'$, valutati in base al REA, al tasso $i$, annuo, composto, con $i > 0$, precisare quali delle seguenti relazioni sono vere:

$$\text{REA}(A) > \text{REA}(A');$$

$$\text{REA}(A + A') = \text{REA}(A);$$

$$\text{REA}(A + A') = \text{REA}(A) + \text{REA}(A');$$

$$\text{REA}(kA) = \text{REA}(A).$$

**Esercizio n. 8.6**

In riferimento a un progetto $A = [a; t]$, con $a$ e $t$ vettori a $n$ componenti, rispettivamente delle poste e delle scadenze, è individuata la successione dei saldi

$$s_0(x, y), \quad s_1(x, y), \ldots, \quad s_{n-1}(x, y), \quad s_n(x, y),$$

con $x$ tasso applicato ai saldi non negativi, e $y$ tasso applicato ai saldi non positivi.

Indicato, poi, con $B$ il progetto nullo, precisare in base a quali delle seguenti condizioni $A$ è preferito a $B$ :

$s_0(x, y) < 0, \quad s_k(x, y) \geqslant 0, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\};$
$s_k(x, y) > 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad s_n(x, y) = 0;$
$s_k(x, y) < 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad s_n(x, y) = 0;$
$s_0(x, y) < 0, \quad s_k(x, y) \geqslant 0, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\};$
$s_n(x, y) > 0;$
$A$ è un investimento;
$A$ è un finanziamento.

**Esercizio n. 8.7**

In riferimento a un progetto $A = [a; t]$, caratterizzato dal vettore $a$ delle poste e dal vettore $t$ delle corrispondenti scadenze, individuare quale delle seguenti affermazioni è vera:

$\text{REA}(A)$ è funzione lineare di $t$;

$\text{REA}(A)$ è funzione lineare di $i$;

$\text{REA}(A)$ è funzione lineare di $a$;

$\text{REA}(A)$ è funzione lineare di $a$, se il progetto è puro,

ove $\text{REA}(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1+i)^{-k}$, con $i > 0$, tasso periodale composto.

**Esercizio n. 8.8**

Considerato il seguente progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $-100,00$ | $+360,00$ | $-559,00$ | $+329,00$ |

studiare la funzione $\text{REF}(i)$ che descrive il Rendimento Economico Finale del progetto, al variare del tasso $i$, annuo, composto, con $i > -1$.

Successivamente, sulla base di tale funzione, determinare se il progetto è dotato di tasso interno.

**Esercizio n. 8.9**

In relazione ai progetti $A = [a, t]$, $B = [b, t]$, $kA = [ka, t]$, $kB = [kb, t]$, con $a$, $b$, $t$ vettori a $n+1$ componenti e $k > 0$, è calcolato il TRM valutando i saldi ai tassi annui, attivo del 4%, e passivo del 7%.

In riferimento alla proposizione

$$\text{TRM}_A(4\%, 7\%) > \text{TRM}_B(4\%, 7\%) \Rightarrow \text{TRM}_{kA}(4\%, 7\%) > \text{TRM}_{kB}(4\%, 7\%)$$

precisare in quale dei casi sotto elencati essa è vera:

solo se $kA$ e $kB$ ammettono tasso interno;
solo se $A$ e $B$ sono puri a tasso nullo;
solo se $A$, $B$, $kA$, $kB$ sono puri a tasso nullo;
sempre.

**NB**: come noto, un progetto è puro, a un dato tasso, quando le prime $n$ componenti del vettore dei saldi di cassa, calcolati a quel tasso, non presenta inversioni di segno.

**Esercizio n. 8.10**

Scrivere e rappresentare sull'asse dei tempi due esempi di progetti finanziari, il primo che costituisca un *investimento a redditi staccati* e il secondo un *investimento a redditi incorporati*, sapendo che tali progetti devono avere durata pari a tre anni e tasso interno $i$, con $i = 20\%$, annuo, composto.

Precisare, inoltre, il motivo per cui si usano gli aggettivi "staccati" e "incorporati".

**Esercizio n. 8.11**

Un progetto prevede un costo iniziale di € 100.000, 00 e un ricavo di € 125.000, 00 , dopo un anno.

Attui tale progetto usando sia denaro personale, che denaro preso a prestito, da rimborsare a fine anno unitamente agli interessi calcolati al tasso del 10% annuo.

Determina l'importo del capitale personale affinché esso renda il 30% annuo, cioè il progetto sia caratterizzato da un ROE del 30% .

**Esercizio n. 8.12**

In riferimento al seguente progetto finanziario $A$

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $-500,00$ | $+145,00$ | $-454,00$ | $+1.200,00$ |

sapendo che disponi solo di un capitale iniziale di € 200, 00 e che puoi ottenere finanziamenti al tasso del 15%, annuo, composto, attui il progetto $A$ e un progetto integrativo $F$ da gestire al meglio.

Individua le operazioni che caratterizzano il progetto $F$ e rappresenta sull'asse dei tempi il progetto $A + F$ che realizzi complessivamente.

Determina se il progetto $A + F$ è dotato di un tasso interno; in caso affermativo, precisato se è un TIR (tasso interno di rendimento) o un TIC (tasso interno di costo), calcolalo.

Successivamente, osservato che il tasso del 20% annuo, composto, azzera il REA del progetto $A$, precisa se tale tasso è il TI del progetto $A$ e fai un confronto motivato con il TI del progetto $A + F$.

**Esercizio n. 8.13**

Oggi, 1 gennaio, possiedi vecchi titoli, che prevedono cedole, in godimento al 31 dicembre di ogni anno, al tasso del 13% annuo, e rimborso alla pari tra quattro anni. Tali titoli, oggi, hanno una quotazione pari a $K$, per ogni 100 di valore nominale.

Oggi sono emessi nuovi titoli al prezzo di 98 per ogni 100 di valore nominale, che prevedono cedole, il 31 dicembre di ogni anno, al tasso del 10% annuo, e rimborso tra quattro anni, il 31 dicembre, a 102 per ogni 100 di valore nominale.

Tu puoi conservare i vecchi titoli fino alla scadenza oppure rivenderli e con il ricavato acquistare i titoli oggi emessi.

Sulla base di quanto sopra determina i valori di $K$ affinchè, ogni 31 dicembre dei prossimi quattro anni, i vecchi titoli producano un incasso superiore a quello prodotto dai nuovi.

Nel caso, invece, sia $K = 107{,}8$ e la scelta sia effettuta sulla base del REA, scrivi l'espressione che permette di determinare i valori del tasso $i$, annuo composto, con $i \geq 0$ , per i quali è preferibile conservare i vecchi titoli.

(Si veda anche l'esercizio n. 9.6)

**Esercizio n. 8.14**

In riferimento al seguente progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $-50.000,00$ | $+40.000,00$ | $+20.000,00$ | $+20.000,00$ |

individua i tassi di interesse $i$, annui composti, con $i \geq 0$, per i quali il *pay-back*, calcolato al tasso $i$, risulta uguale a due anni.

**Esercizio n. 8.15**

In riferimento ai seguenti progetti finanziari tra loro compatibili e dimensionabili a piacere

| | anni | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ : | capitali in € | $-30.000,00$ | | $+44.000,00$ |
| $B$ : | capitali in € | $-90.000,00$ | $+130.000,00$ | |

attuo il progetto $C = (\alpha A + \beta B)$, con $\alpha$ e $\beta$ entrambi non negativi. Trova i valori $\alpha$ e $\beta$ per i quali il progetto $C$ ha posta iniziale pari a € $60.000,00$ e realizza un TIR del 35%, annuo composto.

**Esercizio n. 8.16**

In riferimento ai seguenti progetti finanziari

| | anni | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $A$ : | capitali in € | | $-2.000,00$ | $+2.100,00$ |
| $B$ : | capitali in € | $+1.000,00$ | $-2.000,00$ | $+1.100,00$ |

stabilisci, se possibile, un ordinamento di preferibilità sulla base del TIR, annuo composto.

**Esercizio n. 8.17**

In riferimento al seguente progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| € | $-50.000,00$ | $+10.000,00$ | $-80.000,00$ | $+50.000,00$ | $+90.00,00$ |

scrivi le relazioni che servono a calcolare le *duration* dei costi e dei ricavi utilizzando, per le valutazioni, una generica legge di capitalizzazione $f(t)$; calcola poi le duration dei costi e dei ricavi del progetto con $f(t) = 1,1^t$ e su questa base qualifica il progetto stesso.

**Esercizio n. 8.18**

In riferimento al seguente progetto finanziario

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| capitali in € | $-10.000,00$ | $+2.900,00$ | $-9.080,00$ | $+24.000,00$ |

determinato, prima il vettore dei saldi a tasso nullo, poi quello al tasso del 15% annuo, individua il possibile utilizzo di ciascuno di essi.

# 9 LE SOLUZIONI APPROSSIMATE DI UNA EQUAZIONE: il metodo di bisezione

**Esercizio n. 9.1**

Un operatore finanziario deposita, oggi, presso una Banca un capitale di € $100,00$ e, fra $t$ anni, depositerà € $300,00$, mentre, fra $3t$ anni, otterrà a saldo € $800,00$. Sapendo che la Banca effettua le valutazioni in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, al tasso del 7%, annuo, determina l'epoca $t$, ed esprimila in anni, mesi e giorni con riferimento all'anno commerciale; utilizza il metodo di bisezione e adotta una tolleranza $T = 0,5$.

**Esercizio n. 9.2**

In relazione all'esercizio n. 7.2.2, calcola il tasso $x$ al quale in effetti è stato ottenuto il prestito, cioè il Tasso Interno di Costo, annuo composto, dell'operazione; utilizza il metodo di bisezione riferito all'equazione $f(v)$, con $v = \dfrac{1}{1+x}$, e, eseguite sette iterazioni, precisa la tolleranza $T_v$.

**Esercizio n. 9.3**

Oggi mi concedono un mutuo di importo $S$, che ammortizzo con quattro rate annue, ciascuna di importo pari a € $0{,}36S$, la prima delle quali esigibile fra due anni. Con l'utilizzo del metodo di bisezione (errore massimo tollerato: 2/10 di punto %), calcola il tasso interno, annuo composto dell'operazione, precisandone il tipo.

**Esercizio n. 9.4**

In relazione all'esercizio n. 7.3.4, calcola il tasso al quale in effetti è stato rimborsato il prestito, cioè il Tasso Interno di Costo, annuo composto, dell'operazione.

**Esercizio n. 9.5**

In relazione all'esercizio n. 7.2.3, calcola il Tasso Interno di Costo, annuo composto, dell'operazione. (Errore massimo tollerato: 2/10 di punto %).

**Esercizio n. 9.6**

In relazione alla scelta tra progetti finanziari di cui all'esercizio n. 8.13, calcola i valori del tasso $i$ al quale è preferibile conservare i vecchi titoli, sulla base del criterio REA, valutato al tasso $i$, annuo composto, con $i \geq 0$. (Errore massimo tollerato: 2/10 di punto %).

**Esercizio n. 9.7**

In relazione all'esercizio n. 6.1, calcola il tasso di costituzione del capitale.

**Esercizio n. 9.8**

In relazione all'esercizio n. 6.2, calcola il tasso di costituzione del capitale.

**Esercizio n. 9.9**

In relazione all'esercizio n. 7.4.5, calcola i valori del tasso per i quali il metodo di ammortamento $A$ è da te preferito a quello $B$.

# PARTE II

# RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

## 1 LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE

**Risoluzione esercizio n. 1.1**

Il valore $f(0)$ della funzione, con $t = 0$, è pari a $1$;
la derivata prima $f'(t)$ è

$$f'(t) = \frac{2^{\frac{t}{10}} 0{,}1 \cdot \ln 2 \cdot (1 + 0{,}04t) - 2^{\frac{t}{10}} 0{,}04}{(1 + 0{,}04t)^2} = \frac{2^{\frac{t}{10}}}{(1 + 0{,}04t)^2} [0{,}1 \cdot \ln 2 \cdot (1 + 0{,}04t) - 0{,}04];$$

il segno di tale derivata varia al variare del segno della funzione lineare entro le parentesi quadrate; osservato che quest'ultima è crescente e che si ha $f'(0) = 1 \cdot [+0{,}029...]$, la $f'(t)$ è positiva $\forall t \geq 0$; la funzione $f(t)$ è, perciò, strettamente crescente $\forall t \geq 0$, e quindi $f(t)$ può rappresentare il fattore di montante di una legge di capitalizzazione;

**a)** il tasso unitario d'interesse è

$$i = f(1) - 1 \simeq 3{,}06\%;$$

**b)** il valore attuale richiesto è ottenuto come segue:

$$V(0) = \frac{100}{f(3)} = 100 \left[(1 + 0{,}04 \cdot 3) \cdot 2^{-0{,}3}\right] = 90,972269 \simeq 90,97;$$

**c)** l'intensità istantanea di interesse, per $t = 3$, è ottenuta come segue:

$$g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = 0{,}1 \cdot \ln 2 - \frac{0{,}04}{1 + 0{,}04t},$$

perciò

$$g(3) = 0{,}1 \cdot \ln 2 - \frac{0{,}04}{1 + 0{,}04 \cdot 3} = 0,033600432 \simeq 3,36\%.$$

**Risoluzione esercizio n. 1.2**

**a)** La funzione $f(t) = 1 - 0{,}02t + 0{,}05t^2, \quad t \geq 0$, assume valore $f(0) = 1$ e ha derivata prima

$$f'(t) = -0{,}02 + 0{,}1t;$$

il segno di $f'(t)$ è positivo per $t > 0{,}2$ e la funzione $f(t)$, perciò, non è sempre crescente, con $t > 0$; per tale motivo, quindi, la funzione $f(t)$ non è il fattore di montante di un regime capitalizzazione;

**b, c)** la risposta negativa alla prima domanda implica risposta altrettanto negativa alle successive domande.

**Risoluzione esercizio n. 1.3**

**a)** La funzione $f(t)$ è definita e continua $\forall t \geq 0$, e risulta $f(0) = 1$;
la derivata prima $f'(t)$

$$f'(t) = (1+\beta)^{t\beta^2} \cdot \beta^2 \ln(1+\beta)$$

è positiva, con $\forall t \geq 0$, in quanto $\beta > 0$, e, perciò, la funzione $f(t)$ è il fattore di montante di un regime di capitalizzazione;

**b)** l'intensità istantanea di interesse $g(t)$ associata alla $f(t)$ è

$$g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \beta^2 \ln(1+\beta)\,;$$

**c)** la funzione $g(t)$ risulta costante con $t$, quindi $f(t)$ è scindibile;

**d)** osservato che la funzione $f(t)$ può essere scritta come segue:

$$f(t) = \left[(1+\beta)^{\beta^2}\right]^t ,$$

e, quindi, la funzione $F(t) = (1+i)^t$, che rappresenta il fattore di montante del regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, coincide con la funzione $f(t)$, nel caso sia $i = (1+\beta)^{\beta^2} - 1$.

**Risoluzione esercizio n. 1.4**

**a)** Con $t = 0$ risulta $f(0) = 1$ e dall'esame della funzione $f(t)$ si può osservare quanto segue:

con $\alpha = 0$, $f(t)$ è costante;
con $\alpha > 0$, $f(t)$ è decrescente (il denominatore è positivo e crescente);
con $\alpha < 0$, $f(t)$ è crescente (il denominatore è positivo e decrescente);

quest'ultimo è il caso che caratterizza la funzione $f(t)$ come fattore di montante di un regime di capitalizzazione;

si osserva che, dall'esame della derivata prima $f'(t)$, è possibile arrivare allo stesso risultato come segue:

$$f'(t) = \frac{-3\alpha e^{\alpha t}}{(2+e^{\alpha t})^2} > 0 \qquad \text{con } \alpha < 0\,;$$

**b)** il valore $\alpha = \bar{\alpha}$ per il quale il tasso unitario di interesse è pari al 5% può essere ottenuto come segue:

dalla relazione $i = f(1) - 1 = 0{,}05$ si ha $\dfrac{3}{2+e^{\alpha}} - 1 = 0{,}05\,,$

e, quindi,

$$\alpha = \bar{\alpha} \simeq -0{,}15415068\,;$$

**c)** l'intensità istantanea di interesse è ottenuta come segue:

$$g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\dfrac{-3\alpha e^{\alpha t}}{(2+e^{\alpha t})^2}}{\dfrac{3}{2+e^{\alpha t}}} = \frac{-\alpha e^{\alpha t}}{2+e^{\alpha t}}$$

e con $t = 2$ e $\alpha = \bar{\alpha}$ si ha $g_{\bar{\alpha}}(2) = 0{,}0414136155 \simeq 4{,}14\%$;

**d)** per quanto riguarda il limite di $f(t)$ per $t + \infty$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{2+e^{\alpha t}} = \frac{3}{2}\,, \qquad \text{con } \alpha < 0\,;$$

la funzione $f(t)$ è crescente e presenta un estremo superiore minore di $3$, come evidenziato nella figura che segue

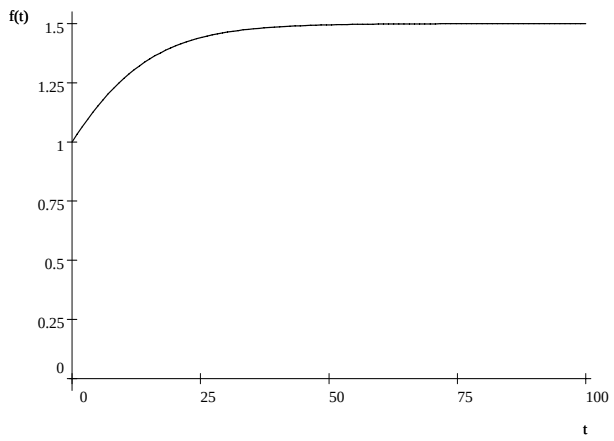


*fig.* 1.1

per le caratteristiche della $f(t)$ su indicate, il montante ottenuto nel regime di capitalizzazione associato alla $f(t)$ sarà inferiore a $\frac{3}{2}$, con $t \geq 0$, e, perciò, un capitale investito con riferimento a tale $f(t)$ non potrà triplicare.

### Risoluzione esercizio n. 1.5

**a)** La funzione $f(t)$ è definita e continua $\forall t \geq 0$, e risulta $f(0) = 1$;
la derivata prima $f'(t)$

$$f'(t) = -\frac{0{,}7 \cdot 0{,}8^t \cdot \ln 0,8}{(0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8^t)^2}$$

è positiva, con $\forall t \geq 0$;
la funzione $f(t)$, perciò, è crescente e può rappresentare il fattore di montante di un regime di capitalizzazione;

**b)** il tasso unitario di interesse associato alla $f(t)$ è

$$i = f(1) - 1 = \frac{1}{0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8^1} - 1 = 0,1627906977 \simeq 16,28\%\,;$$

**c)** con $t \to +\infty$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8^t} = \frac{1}{0{,}3} = 3,\overline{3}\,;$$

a seguito delle caratteristiche della funzione $f(t)$, su evidenziate, un capitale $C$ investito, al tempo $t = 0$, in tale regime, può produrre un capitale $3C$, in un tempo $t^*$ ottenuto come segue

$$3C = C \cdot f(t^*)$$

cioè

$$3 = \frac{1}{0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}8^{t^*}}$$

da cui

$$t^* = 13,643\,784\,1 \simeq 13 \text{ anni, } 7 \text{ mesi e } 22 \text{ giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 1.6**

Osservato che la funzione $f(t)$ può essere scritta sotto la forma $f(t) = a^t$, con $a = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{2}k}$, essa è definita e continua $\forall t \geq 0$, con $a > 0$, cioè $k < 2$, e per tali valori si ha $f(0) = 1$;
la funzione $f(t)$, inoltre, è crescente se si ha $a > 1$ cioè se $k > -2$;

a seguito di quanto sopra, la funzione $f(t)$ può essere considerata fattore di montante con

$$-2 < k < 2\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 1.7**

La funzione $f(t)$ può essere scritta come segue

$$f(t) = \frac{1}{(0,8)^t} = \left(\frac{1}{0,8}\right)^t = (1,25)^t = (1 + 0,25)^t$$

e, quindi, con $i = 25\%$ annuo, è coincidente con la funzione $f(t) = (1+i)^t$, fattore di montante in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

**Risoluzione esercizio n. 1.8**

La funzione $f(t)$ è definita $\forall t \geq 0$; affinché sia $f(0) = 1$ occorre e basta che sia

$$f(0) = b + \frac{3}{4} = 1, \qquad \text{cioè} \qquad b = \frac{1}{4}\,,$$

e, in tal caso si ha

$$f(t) = at + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{3}{4}\,;$$

la funzione $f(t)$ è crescente se si ha $f'(t) > 0$ cioè

$$f'(t) = a - \frac{1}{4\,(1+t)^2} > 0\,;$$

osservato che il sottraendo $\dfrac{1}{4\,(1+t)^2}$ è positivo, decresce strettamente, con $t \geq 0$, e vale $\frac{1}{4}$ per $t = 0$, si può determinare quanto segue:

con $a = \frac{1}{4}$ e $t = 0$, risulta $f'(0) = 0$;

con $a > \frac{1}{4}$ e $t > 0$, risulta $f'(t) > 0$;

per quanto individuato la funzione $f(t)$ è fattore di montante con

$$a \geq \frac{1}{4}\,, \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{4}\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 1.9**

La funzione $f(t)$ è definita e positiva, con $t \in [0; 5)$; in tale intervallo, inoltre, si ha quanto segue:

la funzione $f(t)$ è continua, ed è $f(0) = 1$;

la funzione $f(t)$ è strettamente crescente perché il denominatore $1 - 0{,}2t$ è positivo e strettamente decrescente;

per quanto su determinato, la funzione $f(t)$ è fattore di montante di un regime di capitalizzazione con $t \in [0; 5)$;

il tasso unitario di interesse: $\quad i = f(1) - 1 = 125\%$;

il tasso unitario di sconto: $\quad d = 1 - \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{1{,}25}{2{,}25} = 55{,}56\%$;

l'intensità istantanea di interesse, con $t = 1$, è

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1{,}5625}{2{,}25} \simeq 69{,}44\%\,;$$

si osserva che, con $t = 6$, non è possibile calcolare l'intensità istantanea di interesse in quanto $6 \notin [0; 5)$.

**Risoluzione esercizio n. 1.10**

La risposta corretta è la 3) in quanto, ad esempio, nel caso del regime di capitalizzazione composta, con durate intere, la legge di capitalizzazione $f(n) = (1+i)^n$, con $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, è scindibile ma non derivabile.

**Risoluzione esercizio n. 1.11**

La funzione $v(t)$ è definita e continua nell'intervallo $[0\,;\,5]$ e si ha $v(0) = 1$ e $v(5) \simeq 0{,}026$;

la derivata $v'(t)$: $\quad v'(t) = -12\dfrac{t}{(2+3t^2)^2} < 0$ e, quindi, la funzione è decrescente;

la derivata $v''(t)$: $\quad v''(t) = 12\dfrac{9t^2-2}{(2+3t^2)^3} > 0$, con $t > \dfrac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0,47$, e, perciò, per tali valori la funzione è convessa;

a seguito di quanto individuato, la funzione $v(t)$ ha il seguente andamento

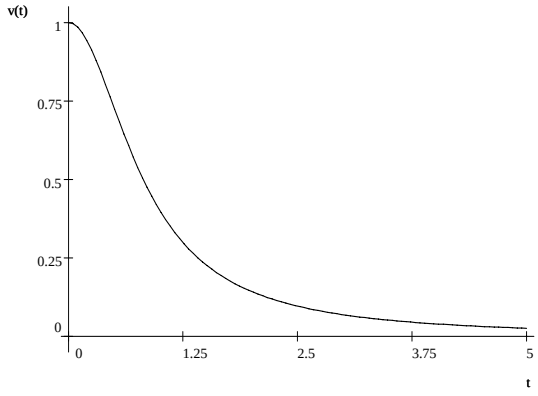


*fig.* 1.2

la funzione $f(t)$ associata alla funzione $v(t)$ è ottenuta come segue

$$f(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{2+3t^2}{2} = 1 + \frac{3}{2}t^2, \qquad 0 \le t \le 5\,;$$

la funzione $f(t)$, come reciproco di $v(t)$, è definita, strettamente crescente (è una parabola) e risulta $f(0) = 1$ e $f(5) = 38,5$; tale funzione, perciò, può essere considerata il fattore di montante di un regime di capitalizzazione di cui la funzione $v(t)$ rappresenta il fattore di attualizzazione.

# 2 LA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

### Risoluzione esercizio n. 2.1

Un capitale $C$ genera, a fine anno, interessi $I = 0{,}05C$ e un montante $M = 1{,}05C$; l'importo, $G_P$, $G_Q$, $G_A$, del gettito fiscale ottenuto secondo le modalità, rispettivamente, delle forze politiche $P$ e $Q$, e la modalità adottata, è il seguente

*gettito fiscale*

$$\begin{aligned}
G_P &= M \cdot 0{,}02 = 1{,}05C \cdot 0{,}02 = 0{,}021C \\
G_Q &= I \cdot 0{,}2 = 0{,}05C \cdot 0{,}2 = 0{,}01C \\
G_A &= C \cdot 0{,}008 + I\frac{x}{100} = 0{,}008C + 0{,}05C\frac{x}{100} = C\,(0{,}008 + 0{,}0005x)\,;
\end{aligned}$$

la condizione assegnata $\quad G_Q < G_A < G_P \quad$ può essere riscritta come segue

$$0{,}01C < C\,(0{,}008 + 0{,}0005x) < 0{,}021C,$$

e permette di ottenere i valori di $x$ richiesti, $\quad 4 < x < 26$ , cioè

$$4\% < x\% < 26\% \, .$$

**Risoluzione esercizio n. 2.2**

Indicati, rispettivamente, con $I_A$ e $I_B$ gli interessi ottenuti dalle due banche si ha quanto segue:

$$I_A = 2S \cdot i\frac{6}{12} \, , \qquad \text{e} \qquad I_B = S(i + 0{,}02)\frac{4}{12} \, ;$$

sapendo che $I_A = I_B + 0{,}05S$ , si ha l'equazione

$$2Si\frac{6}{12} = S(i + 0{,}02)\frac{4}{12} + 0{,}05S$$

la cui soluzione è $i = 8{,}50\%$.

**Risoluzione esercizio n. 2.3**

I dati del problema consentono di scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 1.800,00 = C_1 \dfrac{1}{1 + 0{,}12\dfrac{2}{12}} + C_2 \dfrac{1}{1 + 0{,}12\dfrac{6}{12}} \\ 1.908,64 = C_1 \left(1 + 0{,}12\dfrac{4}{12}\right) + C_2 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è

$$C_1 = 816,00, \qquad C_2 = 1.060,00 \, .$$

**Risoluzione esercizio n. 2.4**

Rappresentata la successione dei rimborsi $R$, sull'asse dei tempi,

| mesi | 0 | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | | | $R$ | | $R$ | $R$ | $R$ |
| tassi | $\bullet \leftarrow$ | | 9% semestrale | | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | 21% annuo | $\rightarrow \bullet$ |

il valore $V_{2,5}$ delle rate, tra 2,5 mesi da oggi, è ottenuto come segue:

$$V_{2,5} = 1.000,00 \left\{ \left(1 + 0,09\frac{15}{180}\right) + \frac{1}{1 + 0{,}09\frac{15}{180}} + \frac{1}{1 + 0{,}21\frac{1}{12} + 0{,}09\frac{15}{180}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1 + 0,21\frac{2}{12} + 0{,}09\frac{15}{180}} \right\} =$$
$$= 3.935,64821 \simeq 3.935,65 \, .$$

**Risoluzione esercizio n. 2.5**

Dalle caratteristiche della rendita si ha

$$\begin{cases} 1.000,00 = \dfrac{C_1}{1+0{,}02\frac{3}{6}} + \dfrac{C_2}{1+0{,}02\frac{5}{6}+0{,}03\frac{1}{6}} \\ \dfrac{C_1+C_2}{1+0{,}02\frac{4}{6}} = \dfrac{C_1}{1+0{,}02\frac{3}{6}} + \dfrac{C_1}{1+0{,}02\frac{5}{6}+0{,}03\frac{1}{6}} \end{cases};$$

osservato che la seconda equazione può essere riscritta come segue

$$\frac{C_1+C_2}{1+0{,}02\frac{4}{6}} = 1.000,00\,,$$

si ha

$$\begin{cases} 1.000,00 = 0,\overline{9900}\cdot C_1 + 0,9787928228\cdot C_2 \\ C_1 + C_2 = 1.013,\overline{3}\,, \end{cases}$$

e, infine, si ottiene

$$C_1 = 721,4285845 \simeq 721,43 \qquad \text{e} \qquad C_2 = 291,9047485 \simeq 291,90\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 2.6**

Rappresentati i capitali sull'asse dei tempi

| epoche | 31/3/2005 | 31/12/2005 | 31/3/2006 | 31/12/2006 | 31/3/2007 | 31/12/2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| capitali | 1.000,00 | | 1.000,00 | | 1.000,00 | |
| saldo | | $M_{31/12/2005}$ | | $M_{31/12/2006}$ | | $M_{31/12/2007}$ |

si ottiene quanto segue:

$$M_{31/12/2005} = 1.000,00\left(1+0{,}12\frac{9}{12}\right) = 1.090,00\,,$$

$$M_{31/12/2006} = 1.090,00\cdot 1{,}12 + 1.000,00\left(1+0{,}12\frac{9}{12}\right) = 2.310,80\,,$$

$$M_{31/12/2007} = 2.310,80\cdot 1{,}12 + 1.000,00\left(1+0{,}12\frac{9}{12}\right) = 3.678,10\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 2.7**

Il capitale è investito per tredici trimestri e un mese, al tasso trimestrale $i$, con $i = 2{,}75\%$, e produce l'interesse $I$, con

$$I = 5.000,00\cdot 0,0275\left(13+\frac{1}{3}\right) = 1.833,\overline{3} \simeq 1.833,33\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 2.8**

Indicati con $I_{\mathrm{F}}$ e $I_{\mathrm{a}}$, rispettivamente, l'interesse maturato presso la Finanziaria e pagatomi dall'amico, la condizione $I_{\mathrm{F}} = I_{\mathrm{a}} + 10,00$ fornisce l'equazione

$$1.000,00 \cdot \frac{x+3}{100} \cdot \frac{4}{6} = 3.000,00 \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{5}{12} + 10,00$$

che ha soluzione $x = 1,714\,285\,714$; ho quindi prestato il denaro all'amico, al tasso $x\%$, con $x\% = 1,714\,285\,714\% \simeq 1,71\%$ annuo.

**Risoluzione esercizio n. 2.9**

Nel caso il capitale rimanga investito presso la banca $A$ per l'intero anno, il montante finale $M_A$ sarà

$$M_A = 10.000,00(1 + 0,06 \cdot 1) = 10.600,00\,;$$

nel caso, invece, il deposito presso la banca $A$, sia estinto a fine luglio, il capitale $C_A$ incassato avrà importo pari a

$$C_A = 10.000,00(1 + \frac{7}{12}0,06) - 100,00 = 10.250,00\,;$$

tale capitale, investito presso la banca $B$, produrrà, a fine anno, il montante $M_B$ di importo pari a

$$M_B = 10.250,00 \left[1 + \frac{5}{12}i(1 - 0,125)\right]\,;$$

la nuova proposta risulterà conveniente se si avrà $M_B > M_A$ cioè se

$$10.250,00 \left[1 + \frac{5}{12}i(1 - 0,125)\right] > 10.600,00\,;$$

si ha, quindi, $i > 0,09365\,853\,658 \simeq 9,37\%$ annuo.

**Risoluzione esercizio n. 2.10**

Il valore attuale $V_A$ dei canoni quadrimestrali è

$$V_A = 2.000,00 + \frac{2.000,00}{1 + x\frac{4}{12}} + \frac{2.000,00}{1 + x\frac{8}{12}}\,;$$

il valore $V_B$ del pagamento globale immediato è

$$V_B = 2.000,00 \cdot 3 - 0,4\,(2.000,00 \cdot 3) = 5.920,00\,;$$

risulta più conveniente la prima modalità di pagamento se $V_A < V_B$ cioè con

$$2.000,00 + \frac{2.000,00}{1 + x\frac{4}{12}} + \frac{2.000,00}{1 + x\frac{8}{12}} < 5.920,00\,;$$

risolta, quindi, la disequazione di secondo grado equivalente, si ha

$$x > 0,03045\,607\,981 \simeq 3,05\% \text{ annuo.}$$

**Risoluzione esercizio n. 2.11**

L'equazione associata all'operazione finanziaria è

$$2C = C \cdot (1 + 0,05t) \ ,$$

con soluzione

$$t = 20 \text{ anni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 2.12**

Nel caso le spese siano pagate alla fine dell'investimento, l'interesse netto $I_n^g$ globale è

$$I_n^g = 5.000,00 \cdot 0,04 \cdot 5 \cdot (1 - 0,125) = 875,00$$

e il montante netto $M_n$ disponibile alla fine dell'investimento è

$$M_n = C + I_n^g = 5.000,00 + 875,00 = 5.875,00\,;$$

nel caso le spese siano pagate alla fine di ogni anno, l'interesse netto $I_n^a$ annuo è

$$I_n^a = 5.000,00 \cdot 0,04 \cdot 1 \cdot (1 - 0,125) = 175,00$$

e il montante netto $M_n$ disponibile alla fine dell'investimento è

$$M_n = C + 5 \cdot I_n^a = 5.000,00 + 5 \cdot 175,00 = 5.875,00\,;$$

le alternative proposte sono equivalenti in quanto, come noto, l'interesse in regime di capitalizzazione semplice dipende dal capitale iniziale e non è prodotto anche dall'interesse maturato nei periodi precedenti.

**Risoluzione esercizio n. 2.13**

Nel caso non interrompessi l'impiego, avrei in quattro anni e sette mesi, un montante $M_A$, con

$$M_A = 2.000,00 \left[1 + 0,04 \left(4 + \frac{7}{12}\right)\right] = 2.366,\overline{6} \simeq 2.366,67\,;$$

se, invece, oggi interrompo l'impiego, detratte le spese, ottengo un netto ricavo $R$, con

$$R = 2.000,00 \left[1 + 0,04 \left(1 + \frac{2}{12}\right)\right] - S = 2.093,\overline{3} - S$$

e tale capitale, reinvestito, alle stesse condizioni, permette di ottenere un montante finale $M_B$ , con

$$M_B = \left(2.093,\overline{3} - S\right)\left[1 + 0,04\left(3 + \frac{5}{12}\right)\right] = 2.379,4\overline{2} - S \cdot 1,13\overline{6}\,;$$

è conveniente interrompere l'impiego se si ha $M_B > M_A$, cioè

$$2.379,4\overline{2} - S \cdot 1,13\overline{6} > 2.366,67$$

e, quindi,

$$0 < S < 11,21896363 \simeq 11,22\,.$$

# 3 LA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

## 3.1 La capitalizzazione composta per durate intere

**Risoluzione esercizio n. 3.1.1**

Con riferimento all'epoca $t_1 = 0$ , l'uguaglianza tra il valore delle prestazioni

$$1.000,00 + 1.000,00 \cdot 1,1^{-2} = 1.826,446\,280\,991\,74$$

e delle controprestazioni

$$300,00 \cdot 1,1^{-1} + 2.068,00 \cdot 1,1^{-3} = 1.826,446\,280\,991\,74$$

risulta vera;

con riferimento all'epoca $t_2 = 3$ , per la scindibilità del regime di capitalizzazione composta, altrettanto vera risulta l'uguaglianza tra il valore delle prestazioni e delle controprestazioni

$$1.000,00 \cdot 1,1^{3} + 1.000,00 \cdot 1,1^{1} = 300,00 \cdot 1,1^{2} + 2.068,00 = 2.431,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.1.2**

Determinato il valore attuale $V$, al tasso del 10%, delle rate di rimborso

$$\begin{aligned} V &= 5.000,00 \cdot 1,1^{-2} + 4.500,00 \cdot 1,1^{-3} + 4.000,00 \cdot 1,1^{-4} = \\ &= 10.245,201\,830\,476\,1 \simeq 10.245,20\,, \end{aligned}$$

essendo $V > 10.000,00$ , il tasso di rimborso è $i$, con $i > 10\%$; il tasso che rende equa finanziariamente l'operazione, infatti, è $i \simeq 0,1093545$ .

**Risoluzione esercizio n. 3.1.3**

Indicate con $P_1 = a \cdot 100.000,00$, con $0 < a < 1$, e $P_2 = (1-a) \cdot 100.000,00$ le parti di capitale investite secondo le due modalità, il montante $M_1$ e $M_2$ rispettivamente ottenuto, a fine anno, è il seguente:

$$\begin{aligned} M_1 &= a \cdot 100.000,00 \cdot 1{,}04^6 \\ M_2 &= (1-a) \cdot 100.000,00 \cdot (1 + 0{,}045 \cdot 4)\,; \end{aligned}$$

indicato con $M$ il montante complessivo che deve essere ottenuto a fine anno per consentire un rendimento del 20% annuo, si ha

$$M = 100.000,00 \cdot (1 + 0,2) = 100.000,00 \cdot 1,2\,;$$

dalla condizione $M_1 + M_2 \geq M$, ovvero

$$a \cdot 1{,}04^6 + (1-a)(1 + 0{,}045 \cdot 4) \geq 1{,}2$$

si ottiene $a \geq 0{,}23441432$;

la soluzione del problema, perciò, è

$$23.441,43 \leq P_1 < 100.000,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.1.4**

Gli importi del capitale necessario per l'acquisto, $A$, di quello rimborsato a scadenza, $R$, e della cedola annua, $C$, sono ottenuti come segue:

$$\begin{aligned} A &= 10.000,00 \cdot 0,95 = 9.500,00\,, \\ R &= 10.000,00 \cdot p \cdot \frac{1}{100} = 100,00p\,, \\ C &= 10.000,00 \cdot 0,05 = 500,00\,; \end{aligned}$$

il titolo avrà un rendimento del 10% annuo se vale

$$9.500,00 = \frac{500,00}{1{,}1} + \frac{500,00}{1{,}1^2} + \frac{500,00 + 100,00p}{1{,}1^3}\,,$$

la cui soluzione è $p = 109,895$.

**Risoluzione esercizio n. 3.1.5**

Il montante $M_1$, alla fine del primo anno è

$$M_1 = 3.000,00(1+i)\,,$$

mentre il montante $M_2$, alla fine del secondo anno, è

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i - 0{,}02) = 3.000,00(1+i)(1+i-0{,}02)\,;$$

l'interesse $I$ generato è

$$I = M_2 - 3.000,00 = 50,00$$

e, riscritto come segue

$$3.000,00(1+i)(1+i-0{,}02)-3.000,00=50,00\,,$$

conduce a una equazione di secondo grado con soluzione

$$i=0,01834\,848\,474\simeq 1,83\%\text{ annuo.}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.1.6**

Nel caso la ritenuta sia effettuata alla fine dell'investimento, l'interesse netto $I_n^g$ globale è

$$I_n^g=5.000,00\cdot\left(1,04^5-1\right)(1-0,125)=947,856\,446\,3\simeq 947,86$$

e il montante netto $M_n$ disponibile alla fine dell'investimento è

$$M_n=C+I_n^g=5.000,00+947,86=5.947,86\,;$$

nel caso la ritenuta sia effettuata alla fine di ogni anno, il tasso netto $i_n$ annuo è

$$i_n=0,04\cdot(1-0,125)=0,035$$

e il montante netto $M_n$ disponibile alla fine dell'investimento è

$$M_n=5.000,00\cdot\left(1,035^5-1\right)=5.938,431\,53\simeq 5.938,43\,;$$

sulla base di quanto sopra, per l'investitore, è preferibile che la ritenuta sia effettuata solo alla fine dell'investimento.

**Risoluzione esercizio n. 3.1.7**

L'alternativa $(a)$ è preferita a quella $(b)$ nel caso valga quanto segue:

$$\frac{1}{2}S(1+x)^2+\frac{1}{2}S(1+y)^2>S\left[1+\frac{x+y}{2}\right]^2\,,$$

cioè

$$(x-y)^2>0\,;$$

tale relazione, con $x\neq y$, è sempre vera e, quindi, $(a)$ è sempre preferita a $(b)$; nel caso, invece, sia $x=y$, le due alternative sono tra loro equivalenti.

**Risoluzione esercizio n. 3.1.8**

Al variare del tasso $i$, con $0\leq i\leq 0{,}2$, si ha quanto segue:

$$\begin{aligned} I_{cs}(i) &= 100,00\cdot 4i=400,00i\,,\\ I_{cc}(i) &= 100,00\left[(1+i)^4-1\right]\,; \end{aligned}$$

il grafico della funzione $I_{cs}(i)$ è un segmento di estremi $O(0;\,0)$ e $A(0,2;\,80)$;
la funzione $I_{cc}(i)$ è continua, dotata di derivate $I'_c(i)$ e $I''_c(i)$ continue, e ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} I_{cc}(0) &= 0\,, \\ I_{cc}(0,2) &= 107,36\,, \\ I'_c(i) &= 400,00(1+i)^3 > 0\,, \\ I''_c(i) &= 1.200,00(1+i)^2 > 0\,, \end{aligned}$$

la funzione $I_{cc}(i)$, perciò, è strettamente crescente e convessa;
con $i = 0$ risulta $\quad I'_{cs}(i) = I'_{cc}(i) = 400,00$ ;

per quanto su indicato, la curva $I_{cc}(i)$ assume valori maggiori di quelli assunti dalla retta $I_{cs}(i)$;

si osserva che tale caratteristica dipende dal fatto che il tasso $i$ è lo stesso nei due regimi ma nel regime di capitalizzazione composta gli interessi sono fruttiferi mentre non lo sono nel regime di capitalizzazione semplice.

## 3.2 La capitalizzazione composta: convenzione esponenziale

### Risoluzione esercizio n. 3.2.1

Il capitale è investito per tredici trimestri e un mese, al tasso effettivo trimestrale $i_4$, con $i_4 = \dfrac{0{,}11}{4} = 2{,}75\%$ e produce l'interesse $I$, con

$$I = 5.000,00\left[(1+0,0275)^{13+\frac{1}{3}} - 1\right] = 2.178,952\,475 \simeq 2.178,95\,.$$

### Risoluzione esercizio n. 3.2.2

Dopo $t$ anni, un capitale unitario, investito al tasso $x$ semestrale, genera il montante $f(t)$ con

$$f\,(t) = (1+x)^{2t} = \left[(1+x)^2\right]^t,$$

uguale al montante ottenuto al tasso $i$ annuo

$$f(t) = (1+i)^t\ ;$$

si ha, quindi,

$$(1+i)^t = \left[(1+x)^2\right]^t,$$

cioè $(1+i) = (1+x)^2$ ;

al tasso $i$, annuo, corrisponde il tasso istantaneo $\delta = \ln(1+i) = 0,1236$, e, quindi, si ottiene l'equazione

$$\ln(1+i) = \ln\left[(1+x)^2\right] = 0,1236\,,$$

con soluzione $x = e^{\frac{1}{2}0{,}1236} - 1 = 0,06\,37\,495\,74 \simeq 6{,}37\%$.

**Risoluzione esercizio n. 3.2.3**

Il montante $M_2$ dopo due anni è

$$M_2 = C \cdot 1,06^2\,,$$

mentre il montante $M_5$ maturato alla fine del quinto anno è

$$M_5 = M_2 \cdot 1,04^3 = C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3\,,$$

e, infine il montante $M_{7,\overline{6}}$ all'epoca finale $t = 7$ anni e 8 mesi, è

$$M_{7,\overline{6}} = M_5 \cdot 1,04^{2,\overline{6}} = C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3 \cdot 1,04^{2,\overline{6}}\,;$$

l'interesse maturato negli ultimi due anni e otto mesi è ottenuto come segue:

$$I = M_{7,\overline{6}} - M_5 = C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3 \cdot 1,04^{2,\overline{6}} - C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3\,;$$

tale interesse deve essere pari a € $500,00$ e perciò

$$C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3 \cdot 1,04^{2,\overline{6}} - C \cdot 1,06^2 \cdot 1,04^3 = 500,00\,;$$

si ha, quindi,

$$C = 3.588,103763 \simeq 3.588,10\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.4**

L'equazione associata all'operazione finanziaria è

$$2C = C \cdot 1,05^t\,,$$

con soluzione

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14,20669908 \text{ anni} \simeq 14 \text{ anni, 2 mesi e 14 giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.5**

Per quanto riguarda il montante $M_A$ prodotto dal capitale $A$, si osserva che il tasso netto $i_n$ al quale $A$ è investito, è

$$i_n = 0,08\,(1 - 0,125) = 0,07\,,$$

e, quindi, il montante $M_A$ è

$$M_A = A \cdot 1,07^{5,25}\,;$$

per quanto riguarda il montante $M_B$ prodotto dal capitale $B$, si osserva che il tasso trimestrale $i_4$ al quale $B = 2A$ è investito, è $i_4 = \dfrac{0,08}{4} = 0,02$, e, quindi, si ha

$$M_B = B \cdot 1,02^{19} = 2A \cdot 1,02^{19}\,;$$

il capitale di importo pari a € $20.000,00$, è ottenuto, tra cinque anni e tre mesi, come somma di $M_A$ e $M_B$, cioè

$$20.000,00 = A \cdot 1,07^{5,25} + 2A \cdot 1,02^{19}\,;$$

si ha, quindi,

$$A = 4.608,189\,24 \simeq 4.608,19$$

e

$$B = 9.216,38\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.6**

L'operazione finanziaria può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| capitali | $2.000,00$ | | | | $M$ |
| epoche in anni | $0$ | | $2,5$ | | $3,41\overline{6}$ |
| tassi annui | $\bullet \leftarrow$ | $7\%$ | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | $6\%$ | $\rightarrow \bullet$ |

e il montante è

$$M = 2.000,00 \cdot 1{,}07^{2,5} \cdot 1,06^{0,5+0,41\overline{6}} = 2.498,\ 541\,005 \simeq 2.498,\ 54\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.7**

Le due operazioni finanziarie possono essere rappresentate sull'asse dei tempi come segue:

| epoche in anni | $0$ | $1$ | $1+\frac{10}{12}$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| tassi annui | $\bullet \leftarrow$ | $8\%$ | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | $i$ | $\rightarrow \bullet$ |
| $a)$ capitali | $C$ | | | | $10.000,00$ |
| $b)$ capitali | | | | $1,17C$ | $10.000,00$ |

il montante di € $10.000,00$, nel caso $a$ e nel caso $b$, è ottenuto come segue

$$\begin{aligned} a) \qquad & 10.000,00 = C \cdot 1,08^{1+\frac{10}{12}} \cdot (1+i)^{3+\frac{2}{12}} \\ b) \qquad & 10.000,00 = 1,17C(1+i)^3\,; \end{aligned}$$

si ha, quindi, l'equazione

$$1,17 = 1,08^{1+\frac{10}{12}} \cdot (1+i)^{\frac{2}{12}}$$

la cui soluzione è $i = 0,100\,154\,959\,2 \simeq 10,02\%$ annuo;

per quanto riguarda il valore di $C$ si ha

$$10.000,00 = 1,17C(1+0,1002)^3$$

e, quindi,

$$C = 6.417,\ 992\,667 \simeq 6.417,\ 99\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.8**

Osservato che il tasso dell'11%, annuo, nominale convertibile trimestralmente, è equivalente al tasso $i_4$, con $i_4 = \dfrac{11\%}{4} = 2,75\%$ trimestale, l'operazione finanziaria può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| capitali | $5.000,00$ | | | | $M$ |
| epoche in trimestri | $0$ | $13$ | $13+\frac{2}{3}$ | $14$ | $28$ |
| tassi trimestrali | $\bullet \leftarrow$ | $2,75\%$ | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | $3\%$ | $\rightarrow \bullet$ |

il montante $M$ è

$$M = 5.000,00 \cdot 1,0275^{13+\frac{2}{3}} \cdot 1,03^{14+\frac{1}{3}} = 11.065,946\,75 \simeq 11.065,95\,,$$

mentre l'interesse $I$ maturato nell'intero periodo è

$$I = M - C = 11.065,95 - 5.000,00 = 6.065,95\,;$$

da quanto su ottenuto è possibile ricavare il montante netto $M_n$ come segue

$$M_n = M - 0,125I = 10.307,706\,25 \simeq 10.307,71\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.9**

Nel caso il capitale sia impiegato in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, dall'equazione associata all'operazione finanziaria

$$2.530,74 = 15.000,00\left[(1+0,0375)^t - 1\right]$$

si ha

$$(1,037\,5)^t = \frac{2.530,74}{15.000,00} + 1 = 1,168\,716$$

e, quindi,

$$t = \frac{\log 1,168\,716}{\log 1,037\,5} = 4,234\,960\,181 \simeq 4 \text{ anni, 2 mesi e 25 giorni;}$$

nel caso il capitale sia impiegato in regime di capitalizzazione semplice, dall'equazione associata all'operazione finanziaria

$$2.530,74 = 15.000,00 \cdot 0,0375 \cdot t$$

si ha

$$t = 4,499\,093\,333 \simeq 4 \text{ anni e 6 mesi.}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.2.10**

Il fattore di montante $f_1(t)$ è

$$f_1(t) = 1 + 0,12t$$

e, nell'intervallo assegnato, corrisponde al segmento di estremi $A(0;\ 1)$ e $B(2;\ 1,24)$;

il fattore di montante $f_2(t)$ è

$$f_2(t) = 1,15^t$$

e, nell'intervallo assegnato, corrisponde all'arco di funzione esponenziale crescente, di estremi $A(0;\ 1)$ e $C(2;\ 1,322\,5)$;
la derivata prima $f_2'(t) = 1,15^t \ln 1,15$ è positiva e, con $t = 0$, si ha $f_2'(0) = 0,139761942$;

osservato che $f_1'(0) = 0,12 < f_2'(0)$, la funzione $f_1(t)$ ha in comune con la $f_2(t)$ solo il punto $A$ e, per $t > 0$, assume valori inferiori a quelli assunti da $f_2(t)$; per tale motivo risulta più conveniente investire nel regime di capitalizzazione caratterizzato dal fattore $f_2(t)$.

## 3.3 La capitalizzazione composta: convenzione lineare

**Risoluzione esercizio n. 3.3.1**

I capitali possono essere rappresentati sull'asse dei tempi come segue:

| capitali | | 10.000,00 | | 10.000,00 | 10.000,00 | 10.000,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| anni | 0 | 1 | | 2 | 3 | 4 |
| mesi | 0 | 12 | 18 | 24 | 36 | 48 |

il valore $V_{18}$, tra diciotto mesi, di tali capitali è ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} V_{18} &= 10.000,00 \cdot \left[ \left(1 + 0,08\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1+0,08\frac{1}{2}} + \frac{(1+0,08)^{-1}}{1+0,08\frac{1}{2}} + \frac{(1+0,08)^{-2}}{1+0,08\frac{1}{2}} \right] = \\ &= 10.000,00 \cdot 3,716216102 = 3.7162,16102 \simeq 3.7162,16\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.2**

L'operazione finanziaria di rimborso del prestito può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| capitali | | $R$ | $R$ | | $R$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| anni | 0 | 1 | 2 | $2 + \frac{5}{12}$ | 3 | 4 |

il valore $V$ delle rate di rimborso è calcolato con riferimento al tasso effettivo $i_6$, bimestrale, con $i_6 = \dfrac{j_6}{6} = 2\%$; si ha, quindi,

$$
\begin{aligned}
&V = \\
&= 20.000,00 \left[ 1{,}02^8 \cdot \left(1 + 0{,}02\frac{1}{2}\right) + 1{,}02^2 \cdot \left(1 + 0{,}02\frac{1}{2}\right) + \frac{1{,}02^{-3}}{1 + 0{,}02\frac{1}{2}} + \frac{1{,}02^{-9}}{1 + 0{,}02\frac{1}{2}} \right] = \\
&= 79.912,85891 \simeq 79.912,86\,.
\end{aligned}
$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.3**

Noto il tasso di interesse $j_4 = 12\%$ annuo, nominale convertibile trimestralmente, si ha il tasso trimestrale effettivo equivalente $i_4 = 3\%$ e l'operazione di impiego di capitale può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| capitale | 1.000,00 | | | | |
| tempi | 0 | 3 $a$ e 6 $m$ | 3 $a$ e 7 $m$ | 3 $a$ e 9 $m$ | 6 $a$ |
| trimestri | | 14 | | 15 | 24 |
| tassi trimestrali | $\bullet \leftarrow$ | 3% | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | 3,36% | $\rightarrow \bullet$ |

il montante lordo $M_l$, al termine dell'impiego, assume il seguente valore:

$$
\begin{aligned}
M_l &= 1.000,00(1 + 0{,}03)^{14} \left(1 + 0{,}03\frac{1}{3} + 0{,}0336\frac{2}{3}\right)(1{,}0336)^9 = \\
&= 2.102,52732 \simeq 2.102,53\,;
\end{aligned}
$$

calcolato l'interesse $I$ maturato nell'intero periodo, è possibile ottenere la ritenuta fiscale $R_f$ e il montante netto $M_n$ al termine dell'impiego:

$$
\begin{aligned}
I &= M_l - 1.000,00 = 1.102,53\,, \\
R_f &= I \cdot 0,125 = 137,81625 \simeq 137,82\,, \\
M_n &= M_l - R_f = 1.964,71\,.
\end{aligned}
$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.4**

La condizione di equità finanziaria dell'operazione, in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, corrisponde alla seguente equazione in due incognite:

$$
1.000,00 + \frac{200,00}{1{,}09} + \frac{500,00}{1{,}09^3} = \frac{1.500,00}{1{,}09^7} + \frac{3.475,00}{1{,}09^A\left(1 + 0{,}09\frac{G}{365}\right)}\,;
$$

in via preliminare, allo scopo di individuare un valore prossimo a quello richiesto, occorre risolvere la corrispondente equazione, nella sola incognita $t_e$, con riferimento al regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale:

$$
1.000,00 + \frac{200,00}{1{,}09} + \frac{500,00}{1{,}09^3} = \frac{1.500,00}{1{,}09^7} + \frac{3.475,00}{1{,}09^{t_e}}
$$

dalla quale si ottiene $1{,}09^{t_e} = 4,639354527$ e, cioè, $t_e = 17,80710454$;

il valore $t_e$, corretto in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, rappresenta un valore prossimo al corrispondente valore $t_l$ in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare; per tale motivo, assunto $A = 17$, la condizione del problema può essere riscritta come segue:

$$1.000,00 + \frac{200,00}{1{,}09} + \frac{500,00}{1{,}09^3} = \frac{1.500,00}{1{,}09^7} + \frac{3.475,00}{1{,}09^{17}\left(1 + 0{,}09\frac{G}{365}\right)}$$

dalla quale si ottiene $G = 292{,}123243$;

il valore cercato, perciò, è

$$t \simeq 17 \text{ anni e } 292 \text{ giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.5**

L'operazione finanziaria può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| tempi | 0 | 6 $m$ | 8 $m$ | 1 $a$ | 2 $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| capitali | $C$ | | | | $100.000,00$ |
| capitali | | | | $1{,}05678 \cdot C$ | $100.000,00$ |
| tassi semestrali | $\bullet \leftarrow$ | 3% | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | $x$ | $\rightarrow \bullet$ |

dalle condizioni del problema si ha il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 100.000,00 = C \cdot 1{,}03 \cdot \left(1 + 0{,}03\dfrac{2}{6} + x\dfrac{4}{6}\right)(1+x)^2 \\ 100.000,00 = (1{,}05678 \cdot C)(1+x)^2, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$x = 2{,}4\%; \qquad C = 90.243,41078 \simeq 90.243,41.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.6**

Calcolato il tasso $i_6$ bimestrale, equivalente al tasso, $j_6$, annuo, nominale convertibile bimestralmente, con $i_6 = \dfrac{j_6}{6} = 0{,}025$, è possibile ottenere il valore $V$ dei debiti, tra un anno e cinque mesi, come segue:

$$V =$$
$$= 1.000,00\left[1{,}025^8\left(1 + 0{,}025\frac{1}{2}\right) + 1{,}025^2\left(1 + 0{,}025\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1{,}025^3\left(1 + 0{,}025\frac{1}{2}\right)}\right] =$$
$$= 3.214,525967 \simeq 3.214,53.$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.7**

L'operazione finanziaria può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| capitale | $2.000,00$ | | | | | | | | $M$ |
| tempi in anni | $0$ | | $2$ | | $2,5$ | | $3$ | | $3,41\overline{6}$ |
| tassi annui | $\bullet \leftarrow$ | $7\%$ | | | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | $6\%$ | | | $\rightarrow \bullet$ |

nel caso $a$), il montante è ottenuto come segue

$$\begin{aligned} M_a &= 2.000,00 \cdot 1{,}07^2 \left[1 + 0{,}07 \cdot 0,5 + 0{,}06 \left(0,5 + 0,41\overline{6}\right)\right] = \\ &= 2.495,881\,991 \simeq 2.495,89\,; \end{aligned}$$

nel caso $b$), il montante è ottenuto come segue

$$\begin{aligned} M_b &= 2.000,00 \cdot 1{,}07^2 \left(1 + 0{,}07 \cdot 0,5 + 0{,}06 \cdot 0,5\right) \left(1 + 0{,}06 \cdot 0,41\overline{6}\right) = \\ &= 2.499,602\,828 \simeq 2.499,61\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.8**

Il capitale è investito per tredici trimestri e un mese, al tasso effettivo trimestrale $i_4$, con $i_4 = \dfrac{0{,}11}{4} = 2{,}75\%$, e produce l'interesse $I$ in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare; si ha, quindi

$$\begin{aligned} I &= M - C = \\ &= 5.000,00\,(1{,}0275)^{13} \left(1 + 0{,}0275\frac{1}{3}\right) - 5.000,00 = 2.179,541\,308 \simeq 2.179,54\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.9**

Espresso il tempo $t$ come somma di un numero intero $n$ di anni e un numero $g$ di giorni, cioè $t = n + g$, l'equazione associata all'operazione finanziaria è

$$2C = C \cdot 1,05^n \left(1 + 0,05\frac{g}{365}\right)\,;$$

osservato che tale equazione presenta due incognite, si cerca preventivamente una soluzione approssimata di $t$ con riferimento al regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, e, successivamente si determina $t$ con riferimento al regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare; si ha, quindi,

$$C \cdot 1{,}05^t = 2C$$

con soluzione

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14,206... \text{ anni;}$$

in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, assunto $n = 14$, si ha

$$1{,}05^{14}\left(1 + 0{,}05\frac{g}{365}\right) = 2$$

con $g = 73,99211373 \simeq 74$;
la soluzione cercata, perciò, è

$$t = 14 \text{ anni e } 74 \text{ giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.10**

Il montante $M(t)$, all'epoca $t$, è ottenuto come segue:

$$0 < t \leq 1 \qquad M(t) = S(1 + 0{,}11t) - \frac{1}{10}S = S(0{,}9 + 0{,}11t),$$
$$\lim_{t\to 0^+} M(t) = 0{,}9S, \qquad \text{e} \qquad M(1) = 1{,}01S\,;$$

$$1 \leq t < 2 \qquad M(t) = S \cdot (1 + 0,11 \cdot 1)\,[1 + 0{,}11(t-1)] - \frac{1}{10}S = S(0{,}8879 + 0{,}1221t),$$
$$M(1) = 1{,}01S, \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 2^-} M(t) = 1{,}1321S\,;$$

$$t = 2 \qquad M(2) = 1{,}11^2 S = 1{,}2321S\,;$$

il grafico di $M(t)$ è una spezzata costituita dai seguenti elementi:

$0 < t \leq 1$ il segmento che congiunge i punti $A\,(0;\, 0{,}9S)$ e $B\,(1;\, 1{,}01S)$ e presenta coefficiente angolare $0{,}11S$;

$1 \leq t < 2$ il segmento che congiunge i punti $B\,(1; 1{,}01S)$ e $C\,(2;\, 1{,}1321S)$ e presenta coefficiente angolare $0{,}1221S$;

$t = 2$ il punto $D\,(2;\, 1{,}2321S)$ ;

si può osservare che, all'epoca finale $t = 2$, la funzione $M(t)$ presenta un punto di discontinuità di prima specie, con salto pari a $0,1S$ che corrisponde all'importo della penale che, per l'impiego completo di due anni, non è pagata.

**Risoluzione esercizio n. 3.3.11**

Il montante $M(t)$, calcolato per le scadenze intere $n$, con $n = \{0;\, 1;\, 2;\, 3\}$, assume i seguenti valori:

$$M(0) = 100,00\,; \qquad M(1) = M(0) \cdot 1,1 = 110,00\,;$$
$$M(2) = M(1) \cdot 1,08 = 118,80\,; \qquad M(3) = M(2) \cdot 1,08 = 128,304\,;$$

per quanto riguarda la funzione $M(t)$, con $t \in [0; 3]$, essa assume i valori di cui sopra ed è definita a tratti come segue:

$$M(t) = \begin{cases} 100,00(1 + 0{,}1t)\,, & \text{con } 0 \leq t \leq 1\,, \\ 110,00\,[1 + 0{,}08(t-1)]\,, & \text{con } 1 \leq t \leq 2\,, \\ 118,80\,[1 + 0{,}08(t-2)]\,, & \text{con } 2 \leq t \leq 3\,. \end{cases}$$

**Risoluzione esercizio n. 3.3.12**

Nel caso una legge di capitalizzazione $f(t)$ sia dotata di derivata prima $f'(t)$, l'intensità istantanea d'interesse associata è $g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Nel regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, la derivata prima $f'(t)$ esiste per tutti i valori di $t$ positivi eccetto, però, i valori di $t$ interi; in corrispondenza a tali valori, infatti, il grafico di $f(t)$ presenta punti angolosi;

nell'intervallo $2 \leq t \leq 3$ la legge di capitalizzazione $f(t)$ è

$$f(t) = 1{,}16^2[1 + 0{,}16(t-2)],$$

e si ha $f(2{,}5) = 1{,}453248$, mentre $f'(t)$ è costante in tutto l'intervallo e vale

$$f'(t) = 1{,}16^2 \cdot 0{,}16 = 0{,}215296\,;$$

l'intensità istantanea di interesse $g(t)$, con $t$ uguale a due anni e sei mesi, è

$$g(2{,}5) = \frac{f'(2{,}5)}{f(2{,}5)} = 0,\overline{148}\,.$$

# 4 LO SCONTO

## 4.1 Lo sconto razionale

**Risoluzione esercizio n. 4.1.1**

Dalla condizione che fornisce il netto ricavo

$$\frac{X}{1+0,03\cdot 3} + \frac{3X}{1+0,03\cdot 4} + \frac{X-500,00}{1+0,03\cdot 6} = 5.000,00$$

si ha

$$X = 1.220,609\,28 \simeq 1.220,61$$

e, quindi,

$$3X = 3.661,83 \qquad \text{e} \qquad X - 500,00 = 720,61\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.1.2**

L'importo delle cambiali deve essere calcolato in modo che la somma scontata sia pari all'importo del debito odierno, e, quindi, si ha quanto segue:

nel caso della prima Banca

$$30.000,00 = \frac{C}{1+0,12\frac{3}{12}} - 6,00 + \frac{2C}{1+0,12\frac{6}{12}} - 6,00$$

da cui

$$C = 10.502,276\,15 \simeq 10.502,28 \qquad \text{e} \qquad 2C \simeq 21.004,56\,;$$

nel caso della seconda Banca

$$30.000,00 = \frac{C}{1+0,13\frac{3}{12}} + \frac{2C}{1+0,13\frac{6}{12}}$$

da cui

$$C = 10.539,416\,94 \simeq 10.539,42 \qquad \text{e} \qquad 2C \simeq 21.078,84\,;$$

a seguito di quanto sopra, per te è preferibile che il creditore sconti le cambiali presso la prima Banca.

**Risoluzione esercizio n. 4.1.3**

Il tasso quadrimestrale $i_3$, equivalente a quello $j_3 = 9\%$, è $i_3 = \dfrac{0,09}{3} = 3\%$ e l'importo $M$ della cambiale, con scadenza dopo quattordici mesi, è

$$M = 25.000,00 \cdot 1,03^3 \left(1 + 0,03\frac{2}{4}\right) = 27.727,947\,63 \simeq 27.727,95\,;$$

il netto ricavo odierno $V$ della cambiale di importo $M$, scontata per sei mesi, è

$$V = \frac{27.727,95}{1+0,11\frac{6}{12}} = 26.282,417\,06 \simeq 26.282,42\,;$$

l'operazione finanziaria di investimento che in effetti ho realizzato è costituita dall'investimento del capitale di importo pari a € $25.000,00$, per otto mesi, e dall'incasso del netto ricavo $V$; con $i$, tasso annuo, semplice, di rendimento dell'operazione, si ha

$$25.000,00 \left(1 + i\frac{8}{12}\right) = 26.282,42$$

e, quindi, $i = 0,0769\,452 \simeq 7,69\%$.

**Risoluzione esercizio n. 4.1.4**

L'importo $C$ della cambiale deve essere tale da garantire un netto ricavo odierno pari al prezzo della merce, cioè

$$5.000,00 = \frac{C}{1+0{,}1275\frac{3}{12}} - 5,00$$

e, quindi, si ha $C = 5.164,534\,375 \simeq 5.164,53$.

**Risoluzione esercizio n. 4.1.5**

Dalla condizione di equità finanziaria

$$1.000,00 = 200,00 + R\left(\frac{1}{1+0,08\frac{1}{12}} + \frac{1}{1+0,08\frac{4}{12}} + \frac{1}{1+0,08\frac{7}{12}}\right) + \frac{50,00}{1+0,08\frac{9}{12}},$$

si ha

$$R = 257,5700318 \simeq 257,57\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.1.6**

Dalla condizione di equità finanziaria

$$10.000,00 = R\left(\frac{1}{1+0,08\frac{6}{12}} + \frac{1}{1+0,08}\right)$$

si ha la rata $R$ di rimborso

$$R = 5.298,113\,209 \simeq 5.298,11\,;$$

il netto ricavo odierno $V$ del creditore è

$$V = \frac{5.298,11}{1+0,06\frac{6}{12}} + \frac{5.298,11}{1+0,06} = 10.142,013\,1 \simeq 10.142,01\,;$$

il tasso $x$ , annuo, in regime di capitalizzazione semplice, al quale tu ottieni il prestito è soluzione della seguente equazione

$$10.000,00 - 10,00 = \frac{5.298,11 + 0,02 \cdot 5.298,11}{1+x\frac{6}{12}} + \frac{5.298,11 + 0,02 \cdot 5.298,11}{1+x}$$

e si ha

$$x = 0,110128\,698\,6 \simeq 11,01\% \text{ annuo, semplice.}$$

**Risoluzione esercizio n. 4.1.7**

L'importo delle cambiali è ottenuto dalla seguente equazione

$$12.000,00 = \left(\frac{C}{1+0,09\frac{5}{12}} - 0,02C\right) + \frac{2C}{1+0,1\frac{8}{12}} + \left(\frac{3C}{1+0,08\frac{15}{12}} - 10,00\right)$$

e si ha

$$\begin{aligned} C &= 2.165,474\,666 \simeq 2.165,47\,; \\ 2C &= 4.330,949\,332 \simeq 4.330,95\,; \\ 3C &= 6.496,423\,998 \simeq 6.496,42\,. \end{aligned}$$

## 4.2 Lo sconto commerciale

**Risoluzione esercizio n. 4.2.1**

Le funzioni $h(t)$ e $k(t)$ sono caratterizzate dalle seguenti equazioni:

$$h(t) = 0{,}05 \cdot t, \qquad 0 \leq t < \frac{1}{d} = \frac{1}{0{,}05} = 20\,,$$

$$k(t) = \frac{0{,}08 \cdot t}{1 + 0{,}08 \cdot t}, \qquad t \geq 0\,;$$

il grafico della funzione $h(t)$ è costituito dal segmento con estremi $O\,(0;0)$ e $B\,(20;1)$, il cui secondo estremo non è compreso;

per quanto riguarda la funzione $k(t)$ si ha:

$$k(0) = 0\,,$$

$$k(20) = 0,6153846\,,$$

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = 1\,,$$

$$k'(t) = 0{,}08 \cdot (1 + 0{,}08t)^{-2} > 0\,, \qquad \forall t \geq 0\,,$$

$$k''(t) = -2 \cdot 0{,}08^2 \cdot (1 + 0{,}08t)^{-3} < 0\,, \qquad \forall t \geq 0\,;$$

dall'esame delle due funzioni, si può osservare, poi, quanto segue:

le due curve, oltre che nell'origine, si intersecano nel punto $C(7,5;\ 0,375)$;

la funzione $k(t)$ è strettamente crescente e concava;

nel punto $O\,(0;0)$, si ha $h'(0) = 0{,}05$ e $k'(0) = 0{,}08$ e, quindi, la funzione $k(t)$ ha tangente nell'origine con coefficiente angolare superiore a quello di $h(t)$;

la funzione $k(t)$, nell'intervallo $(0;\ 7{,}5)$, assume valori superiori a quelli assunti da $h(t)$ mentre, nell'intervallo $(7{,}5;\ 20)$, assume valori inferiori a quelli assunti da $h(t)$ per, poi, tendere all'asintoto orizzontale di equazione $y = 1$;

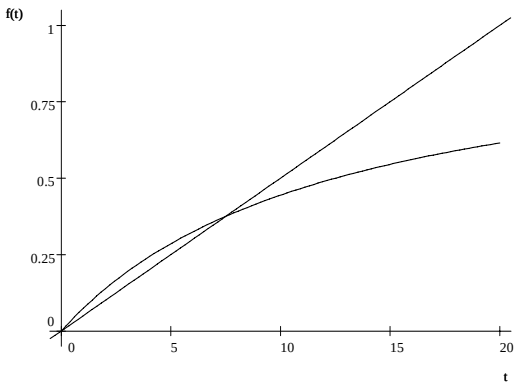


*fig.* 4.1

**Risoluzione esercizio n. 4.2.2**

Il valore attuale (somma scontata) e il montante dei capitali $C_1$ e $C_2$ sono ottenuti come segue:

$$\begin{cases} 28.600,00 = C_1\left(1-0,12\dfrac{2}{12}\right)+C_2\left(1-0,12\dfrac{6}{12}\right) \\ 30.416,67 = \dfrac{C_1}{1-0,12\frac{4}{12}}+C_2\,; \end{cases}$$

si ha, quindi, il sistema

$$\begin{cases} 28.600,00 = 0,98C_1+0,94C_2 \\ 30.416,67 = \dfrac{C_1}{0,96}+C_2 \end{cases}$$

con soluzione

$$C_1 = 9.996,24\,; \qquad C_2 = 20.003,92\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.3**

Tenendo conto del valore, tra due mesi, dei capitali $C_1$ e $C_2$ , e della relazione tra gli stessi, si ha il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} C_1 = 0{,}985\cdot C_2 \\ \dfrac{C_1}{1-0{,}18\frac{1}{12}}+C_2\left(1-0{,}18\dfrac{1}{12}\right) = 7.940,00\,, \end{cases}$$

da cui si ottiene l'importo dei capitali

$$C_1 = 3.940,00\,; \qquad C_2 = 4.000,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.4**

Il valore nominale della cambiale è ottenuto come segue:

$$C = \frac{10.000,00}{1-0,09\frac{3}{12}} = 10.230,17903 \simeq 10.230,18\,;$$

il netto ricavo $V_A$ e $V_B$ ottenuto, rispettivamente dalle banche $A$ e $B$ è il seguente:

$$\begin{aligned} V_A &= 10.230,18\left(1-d\frac{1}{12}\right); \\ V_B &= 10.230,18\left(1-\frac{7}{8}d\cdot\frac{1}{12}\right)-0,0015\cdot 10.230,18 = \\ &= 10.214,83473-745,950625d\,; \end{aligned}$$

con $V_A = V_B$ , si ha

$$10.230,18\left(1-d\frac{1}{12}\right)=10.214,83473-745,950625d$$

e, quindi, si ottiene $d = 14,40\%$.

**Risoluzione esercizio n. 4.2.5**

Il credito futuro $M$ e il netto ricavo $V$ dell'operazione di sconto sono

$$M = 10.000,00(1+0{,}06\cdot t)\,,$$
$$V = M\left[1-0{,}12\left(t-\frac{7}{12}\right)\right]\;;$$

noto il valore $V = 9.828,00$ , la seguente equazione di secondo grado

$$9.828,00 = 10.000,00(1+0{,}06\cdot t)\left[1-0{,}12\left(t-\frac{7}{12}\right)\right]\,,$$

scartata la soluzione negativa che non soddisfa il problema, ha come soluzione

$$t=\frac{16}{12}=1 \text{ anno e } 4 \text{ mesi.}$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.6**

Il valore attuale $V$ di una cambiale di importo $C$, con scadenza tra 30 giorni, è

$$V = C\left(1-x\frac{30}{360}\right)\;;$$

nell'ipotesi che la Finanziaria ottenga un rendimento del 16%, annuo semplice, vale la seguente condizione:

$$V\left(1+0{,}16\frac{30}{365}\right)=C\,;$$

si ottiene, quindi, l'equazione

$$\left[C\left(1-x\frac{30}{365}\right)\right]\left(1+0{,}16\frac{30}{365}\right)=C$$

con soluzione $x = 0,1557598702 \simeq 15{,}58\%$ .

**Risoluzione esercizio n. 4.2.7**

Dalla condizione che fornisce il netto ricavo

$$X\cdot(1-0,03\cdot 3)+3X\cdot(1-0,03\cdot 4)+(X-500,00)\cdot(1-0,03\cdot 6)=5.000,00$$

si ha

$$X = 1.237,986\,27 \simeq 1.237,99$$

e, quindi,

$$3X = 3.713,97 \qquad \text{e} \qquad X - 500,00 = 737,99\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.8**

Per ottenere il capitale di importo $S$, all'inizio dell'anno, l'impresa deve rilasciare una cambiale, a tre mesi, di importo $C_3$ tale che sia

$$S = C_3\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)$$

cioè

$$C_3 = \frac{S}{1 - 0,07\frac{3}{12}}\,;$$

all'epoca $t = 3$ mesi, per far fronte al debito di importo $C_3$, viene concordata una cambiale di importo $C_6$, con scadenza dopo ulteriori tre mesi, con

$$C_3 = C_6\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)$$

e, quindi,

$$C_6 = \frac{C_3}{1 - 0,07\frac{3}{12}} = \frac{S}{\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)^2}\,;$$

alle epoche $t = 6$ mesi e $t = 9$ mesi, a seguito dei successivi rinnovi, si rilasciano le cambiali $C_9$ e $C_{12}$ di importo

$$C_9 = \frac{S}{\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)^3} \qquad \text{e} \qquad C_{12} = \frac{S}{\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)^4}\,;$$

all'epoca $t = 1$ anno, è restituito l'importo della cambiale $C_{12}$, a fronte del capitale $S$ ottenuto in prestito all'inizio dell'anno; si ha, quindi, la relazione

$$S(1 + x) = \frac{S}{\left(1 - 0,07\frac{3}{12}\right)^4}\,,$$

dalla quale si ricava

$$x = 0,0731\,730\,64 \simeq 7,32\% \text{ annuo.}$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.9**

Nel caso sia adottato il regime di sconto razionale, al tasso di interesse del 15% annuo, una cambiale di importo $M$, che scade tra $m$ mesi, permette di ottenere un netto ricavo $C_r$ con

$$C_r = \frac{M}{1 + 0,15\frac{m}{12}}\,,$$

mentre, nel caso sia adottato il regime di sconto commerciale, al tasso di sconto del 14,50% annuo, una cambiale di importo $M$, che scade tra $m$ mesi permette di ottenere un netto ricavo $C_c$ con

$$C_c = M\left(1 - 0,145 \cdot \frac{m}{12}\right) ;$$

si ha $C_r > C_c$ se

$$\frac{M}{1 + 0,15\frac{m}{12}} > M\left(1 - 0,145 \cdot \frac{m}{12}\right)$$

cioè se $m > 2,758\,620\,712$ ;

sulla base di quanto sopra, perciò, è più conveniente la prima modalità, nel caso tu possieda cambiali con scadenza fra tre mesi oppure quattro mesi, mentre, è più conveniente la seconda alternativa, nel caso tu possieda cambiali con scadenza fra un mese oppure due mesi.

**Risoluzione esercizio n. 4.2.10**

La Banca sconta cambiali di importo $M$, con scadenza fra tre mesi, a fronte di un capitale $C$, oggi, con

$$C = M \cdot \left(1 - 0,13 \cdot \frac{3}{12}\right) = M \cdot 0,967\,5 ;$$

tale operazione di sconto rappresenta, per la Banca, un investimento con un interesse $I$ dato da

$$I = M - C = M - M \cdot 0,967\,5 = M \cdot 0,0325$$

e un tasso di interesse $i$ trimestrale, con

$$i = \frac{I}{C} = \frac{M \cdot 0,0325}{M \cdot 0,9675} = 0,03359\,173\,127 \simeq 3,36\% .$$

**Risoluzione esercizio n. 4.2.11**

L'importo $C$ della cambiale deve essere tale da garantire un netto ricavo odierno pari al prezzo della merce, cioè

$$5.000,00 = C\left(1 - 0{,}1275\frac{3}{12}\right) - 5,00$$

e, quindi, si ha $C = 5.169,786\,959 \simeq 5.169,79$ .

## 4.3 Lo sconto composto

**Risoluzione esercizio n. 4.3.1**

Dalla condizione che fornisce il netto ricavo

$$X \cdot 1,03^{-3} + 3X \cdot 1,03^{-4} + (X - 500,00) \cdot 1,03^{-6} = 5.000,00$$

si ha

$$X = 1226,490\,573 \simeq 1.226,49$$

e, quindi,

$$3X = 3.679,47 \qquad \text{e} \qquad X - 500,00 = 726,49\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.3.2**

Il netto ricavo $V_3$ odierno, relativo alle cambiali con scadenza fra tre mesi, è ottenuto come segue:

$$V_3 = A\left(1 - 0{,}18\frac{3}{12}\right)\ ;$$

calcolato il tasso $i_{12}$ mensile, equivalente a quello annuo, con

$$i_{12} = 1{,}17^{1/12} - 1 \simeq 1{,}32\%\,,$$

è possibile ottenere il netto ricavo $V_6$ odierno, relativo alle cambiali, con scadenza fra sei mesi,

$$V_6 = (100.000,00 - A)\left(\frac{1}{1{,}0132^6} - 0,005\right)\ ;$$

il valore di $A$ è ottenuto come soluzione della seguente equazione

$$93.400,00 = A\left(1 - 0{,}18\frac{3}{12}\right) + (100.000,00 - A)\left(\frac{1}{1{,}0132^6} - 0,005\right)\ ,$$

e si ha

$$A = 41.120,44678 \simeq 41.120,45\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.3.3**

Il capitale $M$ che l'amico renderà a scadenza è

$$M = 10.000,00 \cdot (1 + 0,04 \cdot a)\ ;$$

l'operazione di sconto, relativa al credito $M$, che permette di ottenere il netto ricavo odierno di € $10.447,02$, è caratterizzata dalla seguente equazione

$$10.447,02 = [10.000,00(1 + 0,04 \cdot a)] \cdot 1,05^{-(a-4)}$$

cioè

$$(1 + 0,04 \cdot a) \cdot 1,05^{4-a} - 1,044702 = 0$$

(la soluzione, ottenuta con il metodo di bisezione, è $a \simeq 10$ anni);

il tasso $x$, annuo composto, al quale ho investito il denaro per quattro anni, è ottenuto dalla relazione

$$10.000,00 \cdot (1 + x)^4 = 10.447,02$$

e vale $x = 0,01099\,29 \simeq 1,10\%$ annuo.

**Risoluzione esercizio n. 4.3.4**

Il netto ricavo $V$, odierno è

$$V = 5.700,00\,(1+i)^{-3}\,;$$

l'esborso $E$ sarà costituito presso la Banca con un deposito odierno di € $(V - 100,00)$ e si ha

$$(V - 100,00) \cdot 1,04 = 5.000,00\,;$$

il tasso $i$ è soluzione dell'equazione

$$\left[5.700,00\,(1+i)^{-3} - 100,00\right] \cdot 1,04 = 5.000,00$$

e si ha

$$i = 0,05115\,277\,965 \simeq 5,12\% \text{ annuo composto.}$$

**Risoluzione esercizio n. 4.3.5**

Il tasso $i_2$ semestrale, equivalente a quello $j_2 = 5\%$ è

$$i_2 = \frac{0,05}{2} = 2,5\% \text{ semestrale;}$$

il montante $M$ è

$$M = 5.000,00\,(1{+}0,025)^3 \left(1 + 0{,}025\frac{2}{6}\right) = 5.429,323\,566 \simeq 5.429,32\,,$$

mentre la somma $S$ è

$$S = 5.429,32 \cdot 1,06^4 = 6.854,391\,408 \simeq 6.854,39\,;$$

il netto ricavo odierno $V$ è

$$V = 6.854,39 \cdot 1,07^{-3} = 5.595,224\,005 \simeq 5.595,22\,;$$

a seguito di quanto sopra, si può osservare che l'operazione di investimento realizzata è costituita dall'impiego di € 5.000,00 e dal netto ricavo odierno di € 5.595,22 ; dalla seguente relazione

$$5.000,00\,(1+i)^{2+\frac{8}{12}} = 5.595,22\,,$$

si ha il tasso $i$, con

$$i = 0,04308\,016\,284 \simeq 4,31\% \text{ annuo composto.}$$

**Risoluzione esercizio n. 4.3.6**

Il netto ricavo dell'operazione di sconto composto è ottenuto come segue:

$$1.000,00 = C \cdot \left(1,04^{-1} + 1,04^{-2} + 1,04^{-3}\right)$$

e si ha

$$C = 360,348\,539\,2 \simeq 360,35\,;$$

il valore nominale $T$ del titolo fornisce l'importo della cedola, con $C = T \cdot 0,03$ e, quindi, si ha

$$T = 12.011,\overline{6} \simeq 12.011,67\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 4.3.7**

La somma scontata $V$ è valutata al tasso trimestrale $i_4$ , con $i_4 = \frac{0,08}{4} = 2\%$, e si ha

$$\begin{aligned} V &= 2.500,00 \cdot \frac{1,02^{-5}}{1+0,02\frac{2}{3}} + 3.000,00 \cdot 1,02^{-9} + 3.500,00 \cdot \frac{1,02^{-14}}{1+0,02\frac{1}{3}} = \\ &= 7.379,794992 \simeq 7.379,79\,. \end{aligned}$$

# 5 LE RENDITE

**Risoluzione esercizio n. 5.1**

Rappresentata la rendita sull'asse dei tempi,

| mesi | 0 | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | | | 100,00 | 100,00 | | 100,00 | 100,00 |
| tasso semestrale | • ← | | 6% | → • ← | | 9% | → • |

il valore $V$ della rendita, fra tre mesi e mezzo, è ottenuto come segue

$$\begin{aligned} V &= 100,00 \left\{ \left(1 + 0{,}06\frac{1}{6} + 0,09\frac{15}{180}\right) + \left(1 + 0,09\frac{15}{180}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{1+0,09\frac{15}{180}} + \frac{1}{1+0{,}09\left(\frac{1}{6}+\frac{15}{180}\right)} \right\} = \\ &= 399,5550941 \simeq 399,56\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.2**

Calcolato il tasso $i_2$, effettivo, semestrale, equivalente a quello nominale $j_2 = 12\%$ , con $i_2 = \dfrac{12\%}{2} = 6\%$ , e rappresentata la rendita sull'asse dei tempi,

| mesi | 0 | 6 | 12 | 18 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | | | 100,00 | 100,00 | | 100,00 |
| tasso semestrale | • ← | | | 6% | | → • |

è possibile calcolare il valore $V$ richiesto, come segue

$$\begin{aligned} V &= 100,00 \cdot 1{,}06 \cdot \left(1 + 0{,}06\frac{4}{6}\right) + 100,00\left(1 + 0{,}06\frac{4}{6}\right) + \frac{100,00}{1 + 0{,}06\frac{2}{6}} = \\ &= 312,2792157 \simeq 312,28\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.3**

Indicato con $u$ il fattore di montante $1+i$, e con $v$ quello di attualizzazione $\dfrac{1}{1+i}$, le condizioni del problema forniscono le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{c} a) \\ b) \\ c) \end{array} \qquad \begin{cases} R_1 + R_2 = 5.400,00 \\ R_1 v + R_2 v^2 = 4.000,00 \\ R_1 u + R_2 = 5.760,00\,; \end{cases}$$

il sistema può essere risolto nel seguente modo:
riscritta l'equazione $b)$

$$R_1 u + R_2 = 4.000,00u^2,$$

dal confronto delle equazioni $b)$ e $c)$ si ha

$$4.000,00u^2 = 5.760,00\,,$$

con soluzione $\qquad i = 20\%\,;$
assunto tale valore di $i$, la risoluzione del sistema costituito dalle equazioni $a)$ e $c)$ consente di ottenere i valori di $R_1$ e $R_2$ cercati, cioè,

$$R_1 = 1.800,00 \qquad\qquad R_2 = 3.600,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.4**

Calcolato il tasso $i_2$, effettivo, semestrale, equivalente a quello nominale $j_2 = 10\%$, con $i_2 = \dfrac{10\%}{2} = 5\%$, è possibile calcolare il valore odierno $V$ delle rimanenti rate, come segue:

$$\begin{aligned} V &= 500,00(1{,}05^{-1} + 1{,}05^{-2} + 1{,}05^{-3}) + 2.000,00(1{,}05^{-4} + 1{,}05^{-5}) = \\ &= 500,00a_{\overline{3}|0{,}05} + 2.000,00a_{\overline{2}|0{,}05} \cdot 1{,}05^{-3} = \\ &= 4.574,081298 \simeq 4.574,08\,; \end{aligned}$$

calcolato il tasso $i$, annuo, equivalente a quello semestrale, con $i = 1{,}05^2 - 1 = 10{,}25\%$, è possibile calcolare l'importo $R$ delle rate; dalla relazione

$$4.574,08 = 2R + \frac{R}{0,1025}$$

si ha

$$R = 389,0814938 \simeq 389,08\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.5**

Con $u = 1 + i$ e $v = (1+i)^{-1}$ si ha quanto segue:

$$i + \sigma_{\overline{n}|i} = i + \frac{i}{u^n - 1} = \frac{i\,u^n - i + i}{u^n - 1} = \frac{i\,u^n}{u^n - 1} = \frac{i\,u^n}{u^n(1 - v^n)} = \frac{i}{(1 - v^n)} = \alpha_{\overline{n}|i}\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.6**

Le rate della rendita costituiscono i termini della progressione

$$R_k = R_1 \cdot 1{,}06^{k-1}, \qquad \text{con } k \in \{1, 2, \ldots, 6\}\ ;$$

il valore attuale di tale rendita, al 6% annuo, deve eguagliare l'importo del mutuo, cioè

$$100.000,00 = \sum_{k=1}^{6} \left(R_k \cdot 1{,}06^{-k}\right) = \sum_{k=1}^{6} \left(R_1 \cdot 1{,}06^{k-1} \cdot 1{,}06^{-k}\right) = 6 \cdot \frac{R_1}{1{,}06},$$

e, quindi, si ha

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{106.000,00}{6} = 17.666,\overline{6} \simeq 17.666,67\,, \\ R_6 &= \frac{106.000,00}{6} 1{,}06^5 = 23.641,98521 \simeq 23.641,99\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.7**

Il valore $V_3$ della rendita è ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} V_3 &= 100,00\left(s_{\overline{4}|0{,}03} + a_{\overline{2}|0{,}04}\right) + \frac{200,00}{0,04} 1,04^{-2} = \\ &= 5.229,753233 \simeq 5.229,75\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.8**

Indicato con $W_n$ il valore attuale della rendita troncata, con $n$ rate, come noto, il valore attuale $V$ della rendita perpetua è $l$, con $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$, nel caso $l$ esista finito;

il valore attuale $W_n$ , al tasso $i$, della rendita troncata, con $v = (1+i)^{-1}$ , è ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} W_n &= 2.500,00\left\{v + 1{,}18v^2 + 1{,}18^2v^3 + \cdots + 1{,}18^{n-1}v^n\right\} = \\ &= 2.500,00 \cdot v \cdot \left\{1 + 1{,}18v + 1{,}18^2v^2 + \cdots + 1{,}18^{n-1}v^{n-1}\right\}\ ; \end{aligned}$$

- con $1{,}18v = 1$, cioè $i = 18\%$ , si ha

$$W_n = 2.500,00 \cdot \frac{1}{1{,}18}\,\{n\}$$

e il limite di $W_n$ , per $n \to +\infty$, esiste ma non è finito;

- con $1{,}18v \neq 1$, cioè $i \neq 18\%$ , si ha

$$W_n = 2.500,00 \cdot v \cdot \frac{1-(1{,}18v)^n}{1-1{,}18v}$$

e il limite di $W_n$ , per $n \to +\infty$,

esiste finito, se è $1{,}18v < 1$ , cioè $i > 18\%$ ;

non esiste finito, se è $1{,}18v > 1$ , cioè $i < 18\%$ ;

a seguito di quanto sopra indicato, la rendita non ammette valore attuale se e solo se si ha

$$i \leq 18\% \,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.9**

Calcolato il tasso $i_2$, semestrale, equivalente a quello nominale $j_2 = 14\%$, con

$$i_2 = \frac{14\%}{2} = 7\% \,,$$

da utilizzare nei primi tre anni, si osserva che il tasso da utilizzare, negli anni successivi, è quello del $10,25\%$ annuo;

rappresentata la rendita sull'asse dei tempi

| anni | 0 | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | | | 100,00 | | 100,00 | 100,00 | ... |
| tasso semestrale | • ← | | 7% | | → • | | |
| tasso annuo | | | | | • ← | 10,25% | → |

è possibile calcolare il valore $V_{2,5}$ richiesto, come segue:

$$\begin{aligned} V_{2,5} &= 100,00 \cdot \left(1{,}07 + 1{,}07^{-1} + \frac{1}{0,1025} 1{,}07^{-1}\right) = \\ &= 1.112,242763 \simeq 1.112,24 \,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.10**

Il valore $V_5$ è dato da

$$\begin{aligned} V_5 = \; & S \cdot 1{,}15^3 + (1{,}12 \cdot S) \cdot 1{,}15^2 + (1{,}12^2 \cdot S) \cdot 1{,}15 + (1{,}12^3 \cdot S) + \\ & + (1{,}12^4 \cdot S) \cdot 1{,}15^{-1} + (1{,}12^5 \cdot S) \cdot 1{,}15^{-2} + (1{,}12^6 \cdot S) \cdot 1{,}15^{-3} + \ldots ; \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} V_5 = \; & S \cdot 1{,}15^3 \cdot \{1 + 1{,}12 \cdot 1{,}15^{-1} + 1{,}12^2 \cdot 1{,}15^{-2} + 1{,}12^3 \cdot 1{,}15^{-3} + \\ & + 1{,}12^4 \cdot 1{,}15^{-4} + 1{,}12^5 \cdot 1{,}15^{-5} + 1{,}12^6 \cdot 1{,}15^{-6} + \ldots \} \; ; \end{aligned}$$

si può osservare che entro le parentesi graffe di tale espressione, si ha la somma di infiniti termini in progressione geometrica di primo termine 1 e ragione $q = \dfrac{1{,}12}{1{,}15} < 1$; si ha, perciò,

$$V_5 = 1.000,00 \cdot 1{,}15^3 \cdot \frac{1}{1 - 1{,}12 \cdot 1{,}15^{-1}} = 58.300,20833 \simeq 58.300,21\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.11**

L'importo $R$ di ciascuna rata è soluzione della seguente equazione

$$5.000,00 = Ra_{\overline{4}|0{,}04} + Ra_{\overline{6}|0{,}05} \cdot 1{,}04^{-4}\,,$$

e si ha

$$R = 627,461\,368\,141 \simeq 627,46\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 5.12**

Il tasso $i_2$, semestrale effettivo, è $i_2 = \dfrac{0,04}{2} = 2\%$ mentre, il tasso triennale $i$ è $i = (1 + 0,02)^6 - 1 = 0,126\,162\,419\,264$;

il valore $V$ della rendita, fra nove anni, può essere ottenuto nei seguenti modi:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{700,00}{0,126\,162\,419\,264} \cdot 1,02^{14} = 7.321,000\,497\,075\,64\,;\\
V &= 700,00 \cdot s_{\overline{2}|0,126\,162\,419\,264} \cdot 1,02^2 + \frac{700,00}{0,126\,162\,419\,264} \cdot 1,02^2 =\\
&= 7.321,000\,497\,075\,69\,;\\
V &= 700,00\left(1,02^8 + 1,02^2\right) + \frac{700}{0,126\,162\,419\,264} \cdot 1,02^2 =\\
&= 7.321,000\,497\,075\,66 \simeq 7.321,00\,.
\end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 5.13**

L'uguaglianza tra i valori attuali delle due rendite porta alla seguente relazione

$$3.500,00\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1.720,00\frac{1-(1+i_2)^{-2n}}{i_2}\,;$$

per la condizione dei tassi equivalenti

$$(1+i_2)^2 = 1+i$$

si ha la seguente equazione in $i_2$

$$350 \cdot i_2 \cdot \left[1-(1+i_2)^{-2n}\right] = 172\left[(1+i_2)^2-1\right]\left[1-(1+i_2)^{-2n}\right]$$

e, quindi,

$$350 \cdot i_2 = 172\left[(1+i_2)^2-1\right]\,;$$

la soluzione è $i_2 = 0,03488372093 \simeq 3,49\%$ semestrale cui corrisponde il tasso $i$, con

$$i = 0,07098\,431\,585 \simeq 7,10\% \text{ annuo;}$$

si può osservare che dalla relazione, che caratterizza l'uguaglianza tra i valori attuali, può essere ottenuta la seguente equazione in $i$

$$350\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 172\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{2}}-1}$$

e, quindi,

$$350(1+i)^{\frac{1}{2}} - 350 - 172 \cdot i = 0$$

con soluzione $i = 0,07098\,431\,585 \simeq 7,10\%$ annuo cui corrisponde il tasso $i_2$, con

$$i_2 = 0,03488\,372\,093 \simeq 3,49\% \text{ semestrale.}$$

# 6 LA COSTITUZIONE DI UN CAPITALE

### Risoluzione esercizio n. 6.1

Rappresentata sull'asse dei tempi l'operazione di costituzione di capitale come inizialmente pianificata

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| versamenti | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | |
| capitale da costituire | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | 9% | | | |

è possibile calcolare $C$ come segue

$$C = 1.000,00 \cdot s_{\overline{6}|0,09} \cdot 1{,}09 = 8.200,434675 \simeq 8.200,43\,;$$

nell'ipotesi che il tasso venga ridotto, il fondo $F_2$, costituito alla fine del secondo anno è ottenuto come segue

$$F_2 = 1.000,00 \cdot s_{\overline{3}|0,09} = 3.278,10\,,$$

e il nuovo piano di costituzione può essere rappresentato sull'asse dei tempi, come segue

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| fondo costituito | | | $F_2$ | | | | | | | |
| versamenti | | | | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | |
| capitale da costituire | | | | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | | | | 7% | | | |

l'importo $R$ dei nuovi versamenti è ottenuto come soluzione della seguente equazione

$$3.278,10 \cdot 1{,}07^7 + Rs_{\overline{6}|0{,}07} \cdot 1{,}07 = 8.200,43$$

e si ha $R = 383,6568657 \simeq 383,66$;

il piano di costituzione di capitale, effettivamente realizzato, può essere rappresentato sull'asse dei tempi

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| versamenti | $S$ | $S$ | $S$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | |
| capitale costituito | | | | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | | | $i$ | | | | |

il tasso $i$, con $i = u - 1$, è soluzione della seguente equazione:

$$S(u^9 + u^8 + u^7) + Rs_{\overline{6}|i} \cdot u = C\,,$$

che può essere riscritta come segue:

$$1.000,00(u^9 + u^8 + u^7) + 383,66\frac{u^7 - u}{i} - 8.200,43 = 0\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 6.2**

Rappresentata sull'asse dei tempi l'operazione di costituzione di capitale come inizialmente pianificata

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| versamenti | | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | $R$ | | |
| capitale da costituire | | | | | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | | | 6% | | | | | |

è possibile calcolare $C$ come segue

$$C = 100,00 \cdot s_{\overline{8}|0{,}06} \cdot 1{,}06^2 = 1.112,079494 \simeq 1.112,08\,;$$

nell'ipotesi il tasso venga ridotto, il fondo $F_3$, costituito alla fine del terzo anno è ottenuto come segue

$$F_3 = 100,00 \cdot s_{\overline{3}|0{,}06} = 318,36$$

e il nuovo piano di costituzione può essere rappresentato sull'asse dei termpi, come segue

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| fondo costituito | | | | $F_3$ | | | | | | |
| versamenti | | | | | | $R'$ | | $R'$ | | $R'$ |
| capitale da costituire | | | | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | | | | 4% | | | |

l'importo $R'$ dei nuovi versamenti è ottenuto come soluzione della seguente equazione:

$$318,36 \cdot 1{,}04^6 + R' \cdot \left(1{,}04^4 + 1{,}04^2 + 1\right) = 1.112,08$$

e si ha $R' = 218,133808 \simeq 218,13$;

il piano di costituzione di capitale, effettivamente realizzato, può essere rappresentato sull'asse dei tempi

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| versamenti | | $R$ | $R$ | $R$ | | $R'$ | | $R'$ | | $R'$ |
| capitale costituito | | | | | | | | | | $C$ |
| tasso annuo | | | | | | $i$ | | | | |

il tasso $i$, con $i = u - 1$, è soluzione della seguente equazione:

$$100,00 \cdot (u^8 + u^7 + u^6) + 218,13 \cdot (u^4 + u^2 + 1) = 1.112,08\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 6.3**

L'importo $R$ della rata, come inizialmente programmato, può essere ottenuta come segue

$$R s_{\overline{10}|0,1} = 100.000,00$$

e, quindi,

$$R = 6.274,539489 \simeq 6.274,54\,;$$

l'importo del fondo $F_5$, oggi accumulato, è

$$F_5 = 6.274,54 \cdot s_{\overline{5}|0,1} = 38.306,69415 \simeq 38.306,69\,;$$

la sesta rata $R_6$ ha lo stesso importo della quinta, mentre le rate successive sono ottenute come segue:

$$\begin{aligned}
R_6 &= R = 6.274,54\,,\\
R_7 &= R_6 + 15.000,00 = 21.274,\ 54\ ,\\
R_8 &= R_7 + 15.000,00 = 36.274,54\,,\\
R_9 &= R_8 + 15.000,00 = 51.274,54\,,\\
R_{10} &= \ldots\,;
\end{aligned}$$

la successione dei fondi $F_k$, accumulati di anno in anno, è caratterizzata dalla seguente relazione:

$$F_k = F_{k-1} \cdot 1{,}08 + R_k\,, \qquad \text{con} \quad k > 5\,;$$

si ha perciò

$$\begin{aligned}
F_6 &= 38.306,69 \cdot 1{,}08 + 6.274,54 = 47.645,7652 \simeq 47.645,77\,,\\
F_7 &= 47.645,77 \cdot 1{,}08 + 21.274,54 = 72.731,9716 \simeq 72.731,97\,,\\
F_8 &= 72.731,97 \cdot 1{,}08 + 36.274,54 = 114.825,0676 \simeq 114.825,07\,,\\
F_9 &= 114.825,07 \cdot 1{,}08 + 51.274,54 = 175.285,6156 \simeq 175.285,62\,;
\end{aligned}$$

dall'esame dei valori assunti dal fondo $F_k$ si osserva che, alla fine dell'ottavo anno, non risulta ancora costituito il capitale programmato di € 118.000,00, mentre l'anno successivo il capitale costituito supererebbe quanto programmato; per tale motivo un operatore finanziario ha le seguenti possibilità:

- determinare il numero $g$ di giorni durante i quali lasciare investito $F_8$ affinchè tale capitale costituisca € $118.000,00$, a tale epoca, senza un ulteriore versamento; nel caso sia $0 < g < 365$, tale valore può essere soluzione del problema;
- determinare l'importo di una rata complementare $R_8^c$ da versarsi l'ottavo anno, e costituire quindi, a tale epoca il capitale programmato;

nel primo caso, dalla seguente equazione

$$114.825,07 \cdot \left(1 + 0{,}08\frac{g}{365}\right) = 118.000,00\,,$$

si ha $g = 126,\ 153\,793\,1 \simeq 126$; in tal caso il capitale di € $118.000,00$ sarà costituito tra otto anni e 126 giorni da oggi, come richiesto dal problema;

nel secondo caso la rata complementare $R_8^c$ è soluzione della seguente equazione

$$114.825,07 + R_8^c = 118.000,00\,,$$

con $R_8^c = 3.174,93$; in tal caso il capitale di € $118.000,00$ sarà costituito tra otto anni.

**Risoluzione esercizio n. 6.4**

Nell'ipotesi siano effettuati un numero $n$ intero di versamenti si ha

$$2.000,00 \cdot s_{\overline{n}|0{,}08} = 21.760,00$$

cioè

$$2.000,00 \cdot \frac{1{,}08^n - 1}{0{,}08} = 21.760,00$$

e, quindi, con $n = 8,135\,964\,671$ soluzione di tale equazione, si assume $n = 8$;

in relazione al valore di $n = 8$, su individuato, si può osservare che otto versamenti non consentono di costituire il capitale prefissato, mentre nove sono eccessivi;

il montante della rendita caratterizzata da otto versamenti, sarà, perciò, investito per un numero $g$ di giorni, e si costituirà il capitale prefissato senza il versamento di altre rate complementari; si ha, infatti,

$$2.000,00 \cdot \frac{1{,}08^8 - 1}{0{,}08} \cdot (1 + 0{,}08\frac{g}{365}) = 21.760,00\,,$$

cioè

$$g = 104,392\,715\,1 \simeq 104 \text{ giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 6.5**

Indicato con $i_k$ il tasso del $k$-esimo mese, con $k = \{1;\ 2; ...;\ 9\}$, poichè tali tassi variano, di mese in mese, in progressione geometrica con ragione $q$, si ha

$$i_9 = i_1 \cdot q^8$$

cioè

$$0,0050 = 0,0025 \cdot q^8$$

e quindi

$$q = 1,090\,507\,732\,665\,26\,;$$

il capitale costituito $M$ è

$$\begin{aligned} M &= 12.000,00(1 + i_1 + i_2 + \cdots + i_9) = 12.000,00\left[1 + i_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^8\right)\right] = \\ &= 12.000,00\left[1 + i_1\frac{1-q^9}{1-q}\right] = 12.391,463\,391\,210\,5 \simeq 12.391,46\,. \end{aligned}$$

**Risoluzione esercizio n. 6.6**

Il costo di acquisto $A$ di ogni titolo è

$$A = 1.000,00\frac{97}{100} = 970,00$$

e, quindi, il numero $n$ dei titoli acquistati è la parte intera di

$$\frac{13.500,00}{970,00} = 13,917\,525\,773\,195\,9$$

cioè $n = 13$;

la spesa $S$ per l'acquisto dei titoli è

$$S = 13 \cdot 970,00 = 12.610,00$$

con una rimanenza $R$ data da

$$R = 13.500,00 - 12.610,00 = 890,00\,,$$

depositata sul conto corrente;

ciascun titolo garantisce una cedola $C$, semestrale, con

$$C = 1.000,00 \cdot \frac{0,10}{2} = 50,00$$

e, quindi, ogni fine giugno e fine dicembre, è depositato, sul conto corrente, un capitale $Q$ pari a

$$Q = 13 \cdot 50,00 = 650,00\,;$$

l'operazione di costituzione, tenendo conto anche del rimborso dei titoli, può essere rappresentata sull'asse dei tempi come segue

| capitali | 890 | 650 | 650 | 650 | 650 | 650 | $650 + 13 \cdot 1.000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| epoche in semestri | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| tasso semestrale | | | | 2% | | | |

e il capitale $M$ costituito è

$$M = 890,00 \cdot 1,02^6 + 650,00 \cdot a_{\overline{6}|0,02} + 13 \cdot 1.000,00 = 17.100,278\,626\,08 \simeq 17.100,28\,;$$

tale capitale $M$ è costituito al tasso $i$ ottenuto come segue

$$17.100,28 = 13.500,00\,(1+i)^3$$

con $i = 0,08198\,976\,105\,586\,82 \simeq 8,20\%$ annuo, composto.

**Risoluzione esercizio n. 6.7**

Il capitale $A$ è investito al tasso netto $i = 0,08\,(1-0{,}3) = 5{,}6\%$ annuo e permetterà di ottenere un montante $M_A$ dato da

$$M_A = A \cdot 1{,}056^5\,;$$

il capitale $B$ è investito al tasso $i = \dfrac{0,08}{2} = 4\%$ semestrale e permetterà di ottenere un montante $M_B$ dato da

$$M_B = 2A \cdot 1{,}04^9\,;$$

il capitale pari a € $15.000,00$ è, perciò, costituito come segue

$$15.000,00 = M_A + M_B = A \cdot 1{,}056^5 + 2A \cdot 1{,}04^9$$

e si ha

$$A = 3.605,951\,688\,409\,95 \simeq 3.605,95$$

e

$$B = 7.211,90\,;$$

il tasso $x$ annuo, composto, di costituzione del capitale è soluzione della seguente equazione

$$15.000,00 = 3.605,95\,(1+x)^5 + 2 \cdot 3.605,95\,(1+x)^{4,5}$$

e si ha $\quad x = 0,07251\,951\,386 \simeq 7,25\%$ annuo.

# 7 I PRESTITI INDIVISI

## 7.1 L'ammortamento graduale

**Risoluzione esercizio n. 7.1.1**

Con

$$C_1 = C_2 = C_3 = 20.000,00$$

si ottengono i debiti residui

$$\begin{array}{lclcl} D_1 & = & D_0 - C_1 & = & 70.000,00\,, \\ D_2 & = & D_1 - C_2 & = & 50.000,00\,, \\ D_3 & = & D_2 - C_3 & = & 30.000,00\,, \end{array}$$

e i debiti estinti

$$\begin{array}{lclcl} E_1 & = & C_1 & = & 20.000,00\,, \\ E_2 & = & E_1 + C_2 & = & 40.000,00\,, \\ E_3 & = & E_2 + C_3 & = & 60.000,00\,; \end{array}$$

calcolate le quote interesse

$$\begin{array}{rclcl} I_1 & = & iD_0 & = & 5.400,00\,, \\ I_2 & = & iD_1 & = & 4.200,00\,, \\ I_3 & = & iD_2 & = & 3.000,00\,, \end{array}$$

si possono ottenere le rate

$$R_1 = C_1 + I_1 = 25.400,00\,; \qquad R_2 = C_2 + I_2 = 24.200,00\,; \qquad R_3 = C_3 + I_3 = 23.000,00\,;$$

l'importo costante $R$, delle ultime tre rate, può essere ottenuto come soluzione della seguente equazione

$$D_3 = R \cdot a_{\overline{3}|0,06}$$

cioè

$$R = \frac{30.000,00}{a_{\overline{3}|0,06}} = 11.223,29438 \simeq 11.223,29\,;$$

i rimanenti elementi del piano di ammortamento possono essere ottenuti come segue:

$$\begin{array}{rclcrcl} I_4 & = & D_3 \cdot i & = & 30.000,00 \cdot 0.06 & = & 1.800,00 \\ C_4 & = & R - I_4 & = & 11.223,29 - 1.800,00 & = & 9.423,29 \\ D_4 & = & D_3 - C_4 & = & 30.000,00 - 9.423,29 & = & 20.576,71 \\ E_4 & = & E_3 + C_4 & = & 60.000,00 + 9.423,29 & = & 69.423,29 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} I_5 & = & D_4 \cdot i & = & 20.576,71 \cdot 0,06 & = & 1.234,6026 \simeq 1.234,60 \\ C_5 & = & R - I_5 & = & 11.223,29 - 1.234,60 & = & 9.988,69 \\ D_5 & = & D_4 - C_5 & = & 20.576,71 - 9.988,69 & = & 10.588,02 \\ E_5 & = & E_4 + C_5 & = & 69.423,29 + 9.988,69 & = & 79.411,98 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} I_6 & = & D_5 \cdot i & = & 10.588,02 \cdot 0{,}06 & = & 635,2812 \simeq 635,28 \\ C_6 & = & R - I_6 & = & 11.223,29 - 635,28 & = & 10.588,01 \simeq 10.588,02 \\ D_6 & = & D_5 - C_6 & = & 10.588,02 - 10.588,01 & = & 0,01 \simeq 0,00 \\ E_6 & = & E_5 + C_6 & = & 79.411,98 + 10.588,01 & = & 89.999,99 \simeq 90.000,00 \end{array}$$

il piano di ammortamento del prestito può, quindi, essere trascritto come segue:

| $k$ | $t_k$ | $R_k$ | $C_k$ | $I_k$ | $D_k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 90.000,00 | 0 |
| 1 | 1 | 25.400,00 | 20.000,00 | 5.400,00 | 70.000,00 | 20.000,00 |
| 2 | 2 | 24.200,00 | 20.000,00 | 4.200,00 | 50.000,00 | 40.000,00 |
| 3 | 3 | 23.000,00 | 20.000,00 | 3.000,00 | 30.000,00 | 60.000,00 |
| 4 | 4 | 11.223,29 | 9.423,29 | 1.800,00 | 20.576,71 | 69.423,29 |
| 5 | 5 | 11.223,29 | 9.988,69 | 1.234,60 | 10.588,02 | 79.411,98 |
| 6 | 6 | 11.223,30 | 10.588,02 | 635,28 | 0 | 90.000,00 |

**Risoluzione esercizio n. 7.1.2**

Le rate $R_k$ sono determinate con la seguente relazione

$$R_k = R_1 \cdot 1{,}1^{k-1}, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 7\}\,;$$

una condizioni di equità del prestito impone che il valore attuale della rendita, valutata al tasso del 10% annuo, sia uguale al capitale avuto in prestito, cioè

$$100.000,00 = \sum_{k=1}^{7} (R_k) \cdot 1{,}1^{-k} = \sum_{k=1}^{7} (R_1 \cdot 1{,}1^{k-1}) \cdot 1{,}1^{-k} = 7\frac{R_1}{1{,}1}\,,$$

e, quindi, deve essere

$$R_1 = \frac{1,1 \cdot 100.000,00}{7} = 15.714,28571 \simeq 15.714,29\,;$$

il valore odierno $V_4$ del prestito, calcolato al tasso $i = 10\%$, è pari al debito residuo $D_4$ ; osservato, poi, che il valore $V_4$ , in funzione del tasso $i$, è strettamente decrescente, in quanto le rate $R_5$, $R_6$ ed $R_7$ sono positive, sarà perciò

$$V_4 \geq D_4 \qquad \text{con} \quad 0 < i \leq 10\%\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.1.3**

La prima quota interesse è

$$I_1 = R_1 - C_1 = 60.900,00$$

ma. al tasso $i_4$ effettivo, trimestrale, con $i_4 = \dfrac{j_4}{4} = 3\%$ , si ha anche

$$I_1 = D_0 \left[1{,}03^2 - 1\right],$$

cioè

$$60.900,00 = D_0 \cdot 0,0609\,,$$

e, quindi, l'importo $M$ del mutuo è

$$D_0 = 1.000.000,00 = M\,;$$

il debito residuo $D_1$ , all'epoca $t_1$ , è

$$D_1 = D_0 - C_1 = 800.000,00\,;$$

tale debito residuo produce l'interesse $I_2 = 74.181{,}60$ , nell'intervallo di tempo $t_2 - 2$ , e dalla seguente relazione

$$I_2 = D_1 \left[(1+i)^{t_2-2} - 1\right]$$

cioè

$$74.181,60 = 800.000,00 \left[1,03^{t_2-2} - 1\right]$$

si ha la soluzione $t_2 = 5$ ;

la quota capitale $C_2$ , all'epoca $t_2 = 5$ , è ottenuta come differenza tra i debiti residui $D_1$ e $D_2$ , cioe

$$C_2 = D_1 - D_2 = 700.000,00\,,$$

mentre la rata $R_2$ è ottenuta come segue

$$R_2 = C_2 + I_2 = 774.181,60\,;$$

all'epoca $t_3$ , il debito residuo $D_3$ deve essere nullo e, quindi, si ha

$$C_3 = D_2 = 100.000,00$$

e

$$R_3 = C_3 + I_3 = 103.000,00\,;$$

l'epoca $t_3$ , infine, è ottenuta come soluzione della seguente equazione

$$I_3 = D_2\left(1,03^{t_3-5} - 1\right)$$

cioè $\quad t_3 = 6\,;$

per differenza tra $M$ e il valore dei debiti residui $D_k$ è possibile trovare i valori del debito estinto $E_k$ come segue:

$$\begin{aligned} E_1 = M - D_1 &= \quad 200.000,00\,, \\ E_2 = M - D_2 &= \quad 900.000,00\,, \\ E_3 = M - D_3 &= \quad 1.000.000,00\,; \end{aligned}$$

è possibile, infine, compilare l'intero piano d'ammortamento come segue:

| $k$ | $t_k$ (trimestri) | $R_k$ | $C_k$ | $I_k$ | $D_k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.000.000,00 | 0 |
| 1 | $t_1 = 2$ | 260.900,00 | 200.000,00 | 60.900,00 | 800.000,00 | 200.000,00 |
| 2 | $t_2 = 5$ | 774.181,60 | 700.000,00 | 74.181,60 | 100.000,00 | 900.000,00 |
| 3 | $t_3 = 6$ | 103.000,00 | 100.000,00 | 3.000,00 | 0 | 1.000.000,00 |

**Risoluzione esercizio n. 7.1.4**

Riscritta la relazione scomponendo ogni rata nella somma tra quota capitale e quota interesse

$$C_k = C_{k-1} + iC_{k-1} + (C_k + I_k) - (C_{k-1} + I_{k-1})\,, \quad k = 2, 3, \ldots, n\,,$$

si ha

$$0 = iC_{k-1} + I_k - I_{k-1}\,;$$

espressa la quota interesse in funzione del debito residuo, $I_k = iD_{k-1}$ , si ottiene

$$0 = iC_{k-1} + iD_{k-1} - iD_{k-2}$$

e, quindi,

$$D_{k-1} = D_{k-2} - C_{k-1}\,, \quad \text{con } k = 2, 3, \ldots, n\,;$$

tale relazione rappresenta la classica relazione ricorrente del debito residuo tipica di un ammortamento graduale.

**Risoluzione esercizio n. 7.1.5**

Trovato il tasso $i_3$, effettivo quadrimestrale, con $i_3 = \dfrac{0,09}{3} = 3\%$, utilizzato durante i primi due anni, è possibile determinare $R$ come soluzione della seguente equazione

$$25.000,00 = R\left(1,03^{-3} + 1,03^{-6} + 2 \cdot 1,07^{-1} \cdot 1,03^{-6} + 2 \cdot 1,07^{-2} \cdot 1,03^{-6}\right)$$

cioè $\quad R = 5.299,03222 \simeq 5.299,03\,, \quad$ e, quindi, $\quad 2R = 10.458,06\,;$

il debito residuo $D_2$ è dato dal valore, al tasso del prestito, delle rate future, cioè

$$D_2 = 10.458,06\left(1,07^{-1} + 1,07^{-2}\right) = 18.908,36248 \simeq 18.908,36\,;$$

il valore del debito $V_2$ è dato dal valore, al tasso del 5%, delle rate future, cioè

$$V_2 = 10.458,06\left(1,05^{-1} + 1,05^{-2}\right) = 19.445,82585 \simeq 19.445,83\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.1.6**

Per definizione $V_t(x)$ è il valore, all'epoca $t$, delle $n-t$ rate residue, calcolato al tasso $x$, mentre $D_t$ è il valore, alla stessa epoca, delle stesse rate, calcolato però al tasso $i$ del prestito (equazione prospettiva del debito residuo). Poiché le rate sono tutte positive, $V_t(x)$ è funzione strettamente decrescente di $x$ ed è $V_t(i) = D_t$. Il valore del prestito $V_t(x)$ assume, perciò, valori inferiori a $D_t$ per tutti i tassi $x > i$.

## 7.2 L'ammortamento a due tassi

**Risoluzione esercizio n. 7.2.1**

Le quote interesse $I$, annue, sono ottenute come segue

$$I = S \cdot x\,;$$

i versamenti $A$ devono verificare la condizione $\quad A \cdot s_{\overline{n}|y} = S$, cioè

$$A = \frac{S}{s_{\overline{n}|y}};$$

la rata $R$, annua, complessivamente a disposizione del prestito è

$$R = I + A = S \cdot x + \frac{S}{s_{\overline{n}|y}}\,;$$

nel caso sia $x = y$, la rata $R'$, annua, è

$$R' = S \cdot x + \frac{S}{s_{\overline{n}|x}} = S(x + \frac{1}{s_{\overline{n}|x}}) = \frac{S}{a_{\overline{n}|x}}$$

e non è altro che la rata di rimborso di un mutuo di importo $S$, con il metodo francese; in tale caso si ha

$$z = x = y\,;$$

nel caso sia $x > y$, poichè è

$$s_{\overline{n}|x} > s_{\overline{n}|y}\,,$$

si ha

$$R = S \cdot x + \frac{S}{s_{\overline{n}|y}} > S \cdot x + \frac{S}{s_{\overline{n}|x}} = R'\,;$$

in quanto $R > R^{'}$, con $x > y$, si ha

$$z > x > y\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.2.2**

Le quote interesse $I$, biennali, sono ottenute come segue

$$I = 1.000,00(1,06^2 - 1) = 123,60\,;$$

i versamenti devono verificare la condizione

$$A \cdot 1,02^7 + A \cdot 1,02^5 + 2A \cdot 1,02^3 = 1.000,00$$

dalla quale si ottiene $\quad A = 228,5618958 \simeq 228,56\,;$

le rate $R_k$ a disposizione del prestito assumono i seguenti valori

$$R_1 = A = 228,56; \qquad R_2 = I_2 = 123,60\,; \qquad R_3 = A = 228,56\,; \qquad R_4 = I = 123,60\,;$$

$$R_5 = 2A = 457,12; \qquad R_6 = I = 123,60\,; \qquad R_8 = I = 123,60\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.2.3**

Il rimborso del prestito può essere rappresentato sull'asse dei tempi come segue:

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| interesse | | $I_1$ | | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ |
| tassi passivi | $\bullet \leftarrow$ | 15% | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | | 18% | $\rightarrow \bullet$ |
| versamenti | | | $A$ | | $2A$ | |
| tassi attivi | $\bullet \leftarrow$ | | 6% | $\rightarrow \bullet \leftarrow$ | 7% | $\rightarrow \bullet$ |

le quote interesse $I_k$ sono ottenute come segue:

$$\begin{array}{lcll}
I_1 & = & 100.000,00 \cdot 0{,}15 & = 15.000,00\,, \\
I_3 & = & 100.000,00(1{,}15 \cdot 1{,}18 - 1) & = 35.700,00\,, \\
I_4 & = & 100.000,00 \cdot 0{,}18 & = 18.000,00\,, \\
I_5 & = & I_4 & = 18.000,00\,;
\end{array}$$

mentre $A$ è soluzione della seguente equazione

$$A(1{,}06 \cdot 1{,}07^2) + 2A \cdot 1{,}07 = 100.000,00$$

cioè $\quad A = 29.818,75564 \simeq 29.818,76 \quad$ e, quindi, $\quad 2A \approx 59.637,52\,;$

l'importo $T$ della trattenuta effettuata, tra cinque anni, dalla Banca, con

$$T = 0,02 \cdot 100.000,00 = 2.000,00$$

costituirà un ulteriore esborso per l'impresa;

a seguito di quanto sopra, i capitali a disposizione per l'intera operazione di ammortamento saranno i seguenti:

$$R_1 = I_1 = 15.000,00\,; \qquad R_2 = A = 29.818,76\,; \qquad R_3 = I_3 = 35.700,00\,;$$

$$R_4 = I_4 + 2A = 77.637,52\,; \qquad R_5 = I_5 + T = 20.000,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.2.4**

Le quote interessi $I_k$ , con $k = \{2,\ 4,\ 6\}$ , sono

$$I_k = 10.000,00 \cdot (1,10^2 - 1) = 2.100,00\,;$$

per costituire il capitale netto di € $10.000,00$ si deve costituire, all'epoca $t = 6$ anni, un importo $K$ tale che, detratto $\frac{1}{100}K$, rimanga il capitale da rimborsare; deve essere

$$K(1 - 0,01) = 10.000,00\,,$$

e , quindi, $\quad K = 10.101,\overline{01} \simeq 10.101,01\,;$

l'importo $A$ e $2A$ dei versamenti è ottenuto dalla seguente equazione

$$10.101,01 = A \cdot 1,04^6 + 2A \cdot 1,04^2\,,$$

e si ha

$$\begin{aligned} A &= 2.946,172\,952\,667\,78 \simeq 2.946,17 \\ 2A &\simeq 5.892,34\,; \end{aligned}$$

le rate a disposizione del prestito possono essere schematizzate come segue

| anni | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rate | | $2.100,00$ | $2.946,17$ | $2.100,00$ | $5.892,34$ | $2.100,00$ |

il tasso $x$, annuo, composto, al quale è ottenuto il prestito, con $v = (1+x)^{-1}$ , è soluzione della seguente equazione

$$10.000,00 = 2.100,00\left(v^2 + v^4 + v^6\right) + 2.946,17v^3 + 5892,34v^5\,;$$

con l'utilizzo, ad esempio, del metodo di bisezione, si ha $v = 0,904\,03$ , e, quindi,

$$x = 0,106\,157 \simeq 10,62\%\,.$$

## 7.3 L'ammortamento a rate costanti

**Risoluzione esercizio n. 7.3.1**

Calcolato il tasso $i$, mensile, con $i = \dfrac{j_{12}}{12} = 0,005$, è possibile determinare la rata $R$, mensile, di ammortamento del prestito dalla seguente equazione

$$25.000.000.000,00 = R \cdot a_{\overline{360}|0,005}$$

cioè $R = 149.887.631{,}30$; si ha, quindi, la trattenuta $T$

$$T = \frac{149.887.631{,}30}{2.000.000} = 74,94381565 \simeq 74,94\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.2**

Calcolato il tasso effettivo, semestrale, $i_2$, con $i_2 = \dfrac{j_2}{2} = \dfrac{0,07}{2} = 3,50\%$, la rata costante $R$ è soluzione della seguente equazione

$$10.000,00 = R \cdot a_{\overline{50}|0,035}$$

cioè $R = 426,3370957 \simeq 426,34$;

la trentasettesima quota capitale è

$$C_{37} = R \cdot 1,035^{-(50-37+1)} = 236,3850885 \simeq 236,39\,;$$

il debito residuo $D_{37}$ può essere ottenuto come valore, all'epoca $t = 37$, delle restanti rate

$$D_{37} = R \cdot a_{\overline{50-37}|0,035} = 4.392,469529 \simeq 4.392,47\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.3**

Dalla condizione di equità finanziaria

$$100.000,00 = R \cdot a_{\overline{12}|0,09} + R \cdot a_{\overline{18}|0,07} \cdot 1,09^{-12}$$

si ottiene

$$R = 9.313,519149 \simeq 9.313,52\,;$$

per calcolare la nuda proprietà $N_{23}$ si può determinare, innanzi tutto, il debito residuo $D_{23}$ come valore delle rate residue

$$D_{23} = R \cdot a_{\overline{7}|0,07} = 50.193,25462 \simeq 50.193,25\,,$$

e poi le quote capitale $C_k$, con $k = \{24; 25; ...; 30\}$, come segue:

$$\begin{array}{lclcl}
C_{24} & = & R - I_{24} & = & R - 0{,}07 \cdot D_{23} = 5.799,9925 \simeq 5.799,99 \\
C_{25} & = & C_{24} \cdot 1{,}07 & = & 5.799,99 \cdot 1{,}07 \\
C_{26} & = & C_{25} \cdot 1{,}07 & = & 5.799,99 \cdot 1{,}07^2 \\
.... & & & & .... \\
C_{30} & = & C_{29} \cdot 1{,}07 & = & 5.799,99 \cdot 1{,}07^6\,;
\end{array}$$

a seguito di quanto sopra si ha, infine, la nuda proprietà $N_{23}$ , con

$$N_{23} = \frac{5.799,99}{1{,}05} + \frac{5.799,99 \cdot 1{,}07}{1{,}05^2} + \frac{5.799,99 \cdot 1{,}07^2}{1{,}05^3} + \cdots + \frac{5.799,99 \cdot 1{,}07^6}{1{,}05^7} =$$
$$= \frac{5.799,99}{1{,}05} \left\{ 1 + \frac{1{,}07}{1{,}05} + \frac{1{,}07^2}{1{,}05^2} + \cdots + \frac{1{,}07^6}{1{,}05^6} \right\} =$$
$$= \frac{5.799,99}{1{,}05} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1{,}07}{1{,}05}\right)^7}{1 - \frac{1{,}07}{1{,}05}} \right\} = 40.947,61491 \simeq 40.947,61\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.4**

Dalla condizione di equità finanziaria

$$10.000,00 = R \cdot a_{\overline{10}|0,1}$$

è possibile ottenere l'importo $R$ della rata di ammortamento

$$R = 1.627,453949 \simeq 1.627,45\,;$$

il debito residuo $D_2$ , oggi, è

$$D_2 = 1.627,45 \cdot a_{\overline{8}|0,1} = 8.682,325641 \simeq 8.682,33\,;$$

la rata $R_3$ è tale da soddisfare la seguente condizione

$$D_2 \cdot 1,12 - R_3 = D_3$$

cioè

$$8.682,33 \cdot 1,12 - R_3 = \frac{1}{2} \cdot 10.000,00$$

da cui

$$R_3 = 4.724,2096 \simeq 4.724,21\,;$$

le successive rate $R'$ consentono di rimborsare il debito $D_3$ e, quindi, deve essere

$$R' \cdot a_{\overline{7}|0,12} = 5.000,00$$

cioè

$$R' = 1.095,588679 \simeq 1.095,59\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.5**

Il debito residuo $D_9$ , il nono anno, è

$$D_9 = (R) \cdot a_{\overline{9}|\,i} = 0,72 \cdot 5.000,00$$

e, indicato $v = (1+i)^{-1}$, può essere riscritto come segue

$$D_9 = \left(5.000,00 \cdot \alpha_{\overline{18}|i}\right) \cdot a_{\overline{9}|i} = 5.000,00 \frac{1 - v^9}{1 - v^{18}} = 0,72 \cdot 5.000,00\,;$$

si ha, quindi, la seguente equazione

$$0,72v^{18} - v^9 + 0,28 = 0$$

che, posto $x = v^9$ è equivalente all'equazione

$$0,72x^2 - x + 0,28 = 0$$

la cui soluzione $x = 0,3\bar{8}$, permette di ottenere il tasso $i$ con

$$i = (0,3\bar{8})^{-\frac{1}{9}} - 1 = 0110\,644\,168\,257\,44 \simeq 11,06\%.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.6**

La rata di rimborso $R$, annua, è

$$R = 100.000,00 \cdot \frac{1}{a_{\overline{10}|\,0,09}} = 15.582,008\,990\,903\,3 \simeq 15.582.01\,,$$

mentre il pagamento $P$, effettuato trimestralmente, è

$$P = \frac{15.582.01}{4} + 50,00 = 3.945,502\,5 \simeq 3.945,50\,;$$

per determinare il tasso, annuo, al quale è ottenuto il prestito si può osservare che questi consiste in € $(100.000,00 - 10.000,00) = 90.000,00$ ed è rimborsato con rate trimestrali di importo € $3.945,50$; il tasso $i_4$ trimestrale che rende equo il rimborso è la soluzione dell'equazione

$$90.000,00 = 3.945,50 \cdot a_{\overline{40}|\,i_4}$$

cioè $i_4 = 0,03082168 \simeq 3,08\%$ trimestrale, ottenuto, ad esempio, con il metodo di bisezione; tale tasso è equivalente al tasso $i$, annuo, composto, con

$$i = (1 + 0,03082168)^4 - 1 = 0,129\,104\,597\,622\,4 \simeq 12,91\% \text{ annuo.}$$

**Risoluzione esercizio n. 7.3.7**

Come noto, in un mutuo rimborsato con il metodo francese, al tasso del 18%, annuo composto, le quote capitale $C_k$ costituiscono i termini di una progressione geometrica di ragione $1 + i = 1,18$, ma tale implicazione non è valida in senso opposto.

Nel caso, ad esempio, l'importo del mutuo sia € $10.000,00$ e il tasso sia $i = 10\%$ annuo, composto, è possibile individuare quote capitale $C_k$ in progressione geometrica di ragione $1,18$, che caratterizzino un ammortamento con rate diverse tra loro;

imponendo la condizione di chiusura del prestito

$$10.000,00 = C_1 + C_2 + C_3 = C_1(1 + 1,18 + 1,18^2) = C_1 \cdot 3,5724\,,$$

si ha, infatti,

$$\begin{array}{rcccl} C_1 & = & 2.799,238\,6 & \simeq & 2.799,24\,, \\ C_2 & = & 3.303,103\,2 & \simeq & 3.303,10\,, \\ C_3 & = & 3.897,658\,0 & \simeq & 3.897,66\,, \end{array}$$

è possibile, quindi, individuare le rate dell'ammortamento

$$\begin{array}{llll} t=0 & D_0 = 10.000,00 & & \\ t=1 & D_1 = D_0 - C_1 = 7.200,76 & I_1 = iD_0 = 1.000,00 & R_1 = I_1 + C_1 = 3.799,24 \\ t=2 & D_2 = D_1 - C_2 = 3.897,66 & I_2 = iD_1 = 720,08 & R_2 = I_2 + C_2 = 4.023,18 \\ t=3 & D_3 = D_2 - C_3 = 0 & I_3 = iD_2 = 389,77 & R_3 = I_3 + C_3 = 4.287,43 \end{array}$$

e osservare come risultino tra loro diverse.

**Risoluzione esercizio n. 7.3.8**

Per l'acquisto dei capannoni, è impiegato il capitale disponibile di € $40K$ ed è contratto un mutuo di € $60K$; la rata costante $R$ di ammortamento è

$$R = 60K \cdot a_{\overline{6}|\,0,09} = 60K \frac{0,09}{1-1,09^{-6}} = 13,375\,187K\,;$$

il prezzo $P$ di vendita è

$$P = 100K \cdot 1,045^{10} = 155,296\,942\,2K$$

mentre il ricavo $V$ dalla vendita è

$$V = P - 0,15P = 132,002\,400\,9K\,;$$

si può osservare che l'operazione finanziaria è caratterizzata dall'impiego del capitale proprio di € $40K$, seguito dai pagamenti $R$, a fronte dei quali si ha un ricavo finale $V$; il tasso $i$, annuo composto, che garantisce l'equità dell'operazione è soluzione della seguente equazione

$$40K + 13,375\,187K \cdot a_{\overline{6}|i} = 132,002\,400\,9K\,(1+i)^{-10}$$

cioè $i = 0,09477 \simeq 9,47\%$ annuo, ottenuta, ad esempio, con il metodo di bisezione.

**Risoluzione esercizio n. 7.3.9**

La condizione di equità finanziaria tra prestazioni e controprestazioni impone che l'incasso netto sia uguale al valore attuale delle dieci rate, effettuando le valutazioni al tasso $x$, mensile composto; si ha, quindi,

$$10.000,00 - 1.000,00 = 1.000,00 \cdot a_{\overline{10}|x}$$

cioè

$$9 - \frac{1-(1+x)^{-10}}{x} = 0\,;$$

con l'utilizzo, ad esempio, del metodo di bisezione, si ha $x \simeq 1{,}963\%$ mensile; tale tasso è equivalente al tasso $i$, annuo composto, con

$$i = (1{,}01963)^{12} - 1 \simeq 26{,}27\%.$$

## 7.4 L'ammortamento a quote capitale costanti

**Risoluzione esercizio n. 7.4.1**

La quota capitale $C$, annua, è

$$C = \frac{100.000,00}{10} = 10.000,00\,;$$

il debito residuo $D_k$ , con $k = \{1, 2, ..., 10\}$ , è

$$D_k = (10 - k)\,C = (10 - k) \cdot 10.000,00\,;$$

la quota interessi $I_k$ è

$$I_k = iD_{k-1} = 0,08 \cdot (10 - k + 1) \cdot 10.000,00 = (10 - k + 1) \cdot 800,00\,;$$

la rata $R_k$ è

$$R_k = C + I_k = 10.000,00 + (10 - k + 1) \cdot 800,00$$

il debito estinto $E_k$ è

$$E_k = k \cdot C = k \cdot 10.000,00\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.4.2**

La quota capitale $C$, mensile, è

$$C = \frac{3.000,00}{3} = 1.000,00\,;$$

il debito residuo $D_k$ , con $k = \{1, 2, 3\}$ , è

$$D_1 = 2.000,00\,; \qquad D_2 = 1.000,00\,; \qquad D_3 = 0,00\,;$$

il debito estinto $E_k$ è

$$E_1 = 1.000,00\,; \qquad E_2 = 2.000,00\,; \qquad E_3 = 3.000,00\,;$$

la quota interessi $I_k$ è

$$I_1 = 0,02{\cdot}3.000,00 = 60,00\,; \quad I_2 = 0,03{\cdot}2.000,00 = 60,00\,; \quad I_3 = 0,04{\cdot}1.000,00 = 40,00\,;$$

la rata $R_k = C + I_k$ è

$$R_1 = 1.060,00\,; \qquad R_2 = 1.060,00\,; \qquad R_3 = 1.040,00\,;$$

il tasso di costo $i$, mensile, è soluzione della seguente equazione

$$3.000,00 - 0,01 \cdot 3.000,00 = \frac{1.060,00}{1+i} + \frac{1.060,00}{1+i\cdot 2} + \frac{1.040,00}{1+i\cdot 3}\,;$$

con l'utilizzo, ad esempio, del metodo di bisezione, si ha $i = 0,03241 \simeq 3,24\%$ mensile.

**Risoluzione esercizio n. 7.4.3**

La quota capitale è costante per l'intera durata del rimborso, e, quindi, si ha

$$C_k = C_2 = 1.000,00\,, \qquad \text{con } k = \{1, 2, ..., n\}\,;$$

osservato che si ha

$$D_4 - C_n = 0,00\,,$$

la durata $n$ del prestito sarà pari a cinque anni;

per la condizione di chiusura del prestito, l'importo $S$ del prestito è

$$S = 5 \cdot C_k = 5.000,00\,;$$

individuato, poi, il debito residuo $D_2$, con

$$D_2 = 3 \cdot C_k = 3.000,00\,,$$

dalla condizione

$$I_3 = i \cdot D_2$$

si ha il tasso $i$, annuo, come segue

$$i = \frac{I_3}{D_2} = \frac{300,00}{3.000,00} = 10\%\,;$$

a seguito di quanto individuato, gli elementi del piano di ammortamento sono

| $k$ | $t_k$ | $R_k$ | $C_k$ | $I_k$ | $D_k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5.000,00 | 0 |
| 1 | 1 | 1.500,00 | 1.000,00 | 500,00 | 4.000,00 | 1.000,00 |
| 2 | 2 | 1.400,00 | 1.000,00 | 400,00 | 3.000,00 | 2.000,00 |
| 3 | 3 | 1.300,00 | 1.000,00 | 300,00 | 2.000,00 | 3.000,00 |
| 4 | 4 | 1.200,00 | 1.000,00 | 200,00 | 1.000,00 | 4.000,00 |
| 5 | 5 | 1.100,00 | 1.000,00 | 100,00 | 0 | 5.000,00 |

**Risoluzione esercizio n. 7.4.4**

La rata $R_k$ di rimborso di un prestito $S$ può essere ottenuta, come noto, con la seguente relazione

$$R_k = \frac{S}{n}\left[1 + i\,(n - k + 1)\right], \qquad k = \{1, 2, ..., n\}\,;$$

dalle condizioni del problema si ha il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{S}{n}\left[1 + 0,09\,(n - 2 + 1)\right] = 3.175,00 \\ \dfrac{S}{n}\left[1 + 0,09\,(n - 4 + 1)\right] = 2.725,00 \end{cases}$$

con soluzione

$$n = 4 \qquad \text{e} \qquad S = 10.000,00\,;$$

a seguito di quanto individuato, gli elementi del piano di ammortamento sono

| $k$ | $t_k$ | $R_k$ | $C_k$ | $I_k$ | $D_k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10.000,00 | 0 |
| 1 | 1 | 3.400,00 | 2.500,00 | 900,00 | 7.500,00 | 2.500,00 |
| 2 | 2 | 3.175,00 | 2.500,00 | 675,00 | 5.000,00 | 5.000,00 |
| 3 | 3 | 2.950,00 | 2.500,00 | 450,00 | 2.500,00 | 7.500,00 |
| 4 | 4 | 2.725,00 | 2.500,00 | 225,00 | 0,00 | 10.000,00 |

**Risoluzione esercizio n. 7.4.5**

Si può osservare che i certificati di credito più convenienti sono quelli biennali e, quindi, le rate di ammortamento saranno reinvestite come segue:

la rata $R_1$ sarà investita per due anni al tasso dell'8%, e poi l'investimento proseguirà per altri due anni, al tasso dell'8% ;

la rata $R_2$ sarà investita per due anni al tasso dell'8%, poi l'investimento proseguirà per un anno al tasso del 7% (o viceversa);

la rata $R_3$ sarà investita per due anni al tasso dell'8% ;

la rata $R_4$ sarà investita per un anno al tasso del 7% .

**A)** Nel caso il prestito sia rimborsato con il metodo francese, la rata di ammortamento è

$$R = \frac{100.000,00}{a_{\overline{5}|0,1}} = 26.379,74808 \simeq 26.379,75\,,$$

e, a seguito delle operazioni di investimento in titoli di credito, il capitale $M(A)$ disponibile, tra cinque anni, sarà

$$M(A) = R\left[1{,}08^4 + 1{,}08^2 \cdot 1{,}07 + 1{,}08^2 + 1{,}07 + 1\right] = 154.187,9758 \simeq 154.187,98\,;$$

**B)** nel caso il prestito sia rimborsato con il metodo italiano, la rata può essere determinata unitamente agli altri elementi del piano di ammortamento

| $k$ | $t_k$ | $R_k$ | $C_k$ | $I_k$ | $D_k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100.000,00 | 0 |
| 1 | 1 | 31.000,00 | 20.000,00 | 11.000,00 | 80.000,00 | 20.000,00 |
| 2 | 2 | 28.800,00 | 20.000,00 | 8.800,00 | 60.000,00 | 40.000,00 |
| 3 | 3 | 26.600,00 | 20.000,00 | 6.600,00 | 40.000,00 | 60.000,00 |
| 4 | 4 | 24.400,00 | 20.000,00 | 4.400,00 | 20.000,00 | 80.000,00 |
| 5 | 5 | 22.200,00 | 20.000,00 | 2.200,00 | 0 | 100.000,00 |

e a seguito delle operazioni di investimento in titoli di credito, il capitale $M(B)$ disponibile, tra cinque anni, sarà il seguente:

$$M(B) = R_1 \cdot 1{,}08^4 + R_2 \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}07 + R_3 \cdot 1{,}08^2 + R_4 \cdot 1{,}07 + R_5 = 157.453,1802 \simeq 157.453,18\,;$$

osservato che si ha $M(A) < M(B)$, per chi ha concesso il prestito è preferibile il metodo di ammortamento $B$;

il tasso $x$ effettivo dell'intera operazione può essere ottenuto come soluzione della seguente equazione

$$100.000,00(1+x)^5 = 157.453,18$$

cioè $\quad x = 0,095040766 \simeq 9,50\%$ annuo;

l'espressione che permette di calcolare i valori del tasso $i$ per i quali il metodo $A$ risulta a te più conveniente di quello $B$, può essere ottenuta dopo aver ricavato la rata $R'$ di ammortamento dell'ammortamento francese, al tasso $i'$;

la nuova rata $R'$, costante, è ottenuta come segue:

$$R' = \frac{100.000,00}{a_{\overline{5}|i'}} = \frac{100.000,00}{\dfrac{1-(1+i')^{-5}}{i'}}$$

e $A$ sarà preferito a $B$ se $M(A) > M(B)$, cioè se

$$100.000,00\frac{i'}{1-(1+i')^{-5}}(1{,}08^4 + 1{,}08^2 \cdot 1{,}07 + 1{,}08^2 + 1{,}07 + 1) > 157.453,18\,,$$

e, quindi,

$$\frac{i'}{1-(1+i')^{-5}} > 0,269\,383\,880\,6\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 7.4.6**

In relazione al prestito si può osservare quanto segue:

la prima quota interesse $I_1$, assume il medesimo valore in entrambi i metodi di ammortamento; si ha, infatti, $I_1 = S \cdot i$;

la quota capitale $C$, con $k = \{1, 2, ..., n\}$, è costante nell'ammortamento italiano, e si ha $C = \dfrac{S}{n}$;

la quota capitale, nell'ammortamento francese, risulta crescente secondo i termini di una progressione geometrica di ragione $1 + i$;

la somma delle quote capitale, in entrambi i tipi di ammortamento, è pari a $S$;

nell'ammortamento francese, per la prima quota capitale $C_1$ si ha $C_1 < \dfrac{S}{n}$, perchè, in caso contrario, cioè $C_1 \geq \dfrac{S}{n}$, le quote capitale successive $C_k$, con $k = \{2, 3, ..., n\}$, sarebbero anch'esse di importo superiore a $\dfrac{S}{n}$ e la loro somma supererebbe l'importo $S$ del prestito;

si ha, quindi,

$$R = \frac{S}{n} + I_1 > C_1 + I_1 = R_1\,;$$

risulta, perciò, vera la relazione **a**) .

**Risoluzione esercizio n. 7.4.7**

La quota capitale $C$ annua è

$$C = \frac{10.000,00}{10} = 1.000,00$$

e, quindi, il debito residuo $D_7$ odierno è

$$D_7 = 3 \cdot C = 3.000,00\,;$$

le rate che dovrebbero essere pagate nei prossimi tre anni sono ottenute come segue:

$$\begin{array}{llll}
t = \ \ 8 & I_8 = iD_7 = 300,00\,; & R_8 = C + I_8 = 1.300,00\,; & D_8 = 2C = 2.000,00\,; \\
t = \ \ 9 & I_9 = iD_8 = 200,00\,; & R_9 = C + I_9 = 1.200,00\,; & D_9 = \ \ C = 1.000,00\,; \\
t = 10 & I_{10} = iD_9 = 100,00\,; & R_{10} = C + I_{10} = 1.100,00\,; & D_{10} = 0,00\,;
\end{array}$$

il valore odierno $V_7$ del prestito, con

$$V_7 = D_7 + 0,05D_7 = 1,05D_7 = 3.150,00\,,$$

può essere ottenuto come valore odierno delle rate future, valutate al tasso $x$, annuo composto, è pari a e si ha, quindi,

$$V_7 = 3.150,00 = 1.300,00\,(1+x)^{-1} + 1.200,00\,(1+x)^{-2} + 1.100,00\,(1+x)^{-3}\ ;$$

con l'utilizzo, ad esempio, del metodo di bisezione, si ottiene

$$x = 0,071967 \simeq 7,20\% \text{ annuo.}$$

# 8 I PROGETTI ECONOMICO-FINANZIARI

**Risoluzione esercizio n. 8.1**

La scadenza media aritmetica dei costi, $sma^-$, è

$$sma^- = \frac{1 \cdot 130,00 + 3 \cdot 50,00}{130,00 + 50,00} = 1,\overline{5} \text{ anni } \simeq \text{ 1 anno e 203 giorni;}$$

la scadenza media aritmetica dei ricavi, $sma^+$, è

$$sma^+ = \frac{0 \cdot 100,00 + 2 \cdot 50,00}{100,00 + 50,00} = 0,\overline{6} \text{ anni } \simeq \text{ 0 anni e 243 giorni;}$$

la durata media finanziaria (duration) dei costi, $\delta^-$, è

$$\delta^- = \frac{1 \cdot 130,00 \cdot 1,1^{-1} + 3 \cdot 50,00 \cdot 1,1^{-3}}{130,00 \cdot 1,1^{-1} + 50,00 \cdot 1,1^{-3}} = 1,482392668 \text{ anni } \simeq 1 \text{ anno e 176 giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 8.2**

La scadenza media aritmetica dei costi $sma^-$ è

$$sma^- = \frac{0 \cdot 100,00 + 2 \cdot 559,00}{100,00 + 559,00} = 1{,}696509863 \text{ anni } \simeq \text{ 1 anno e 254 giorni;}$$

la scadenza media finanziaria dei ricavi è la scadenza $t$ soluzione della seguente equazione:

$$(360,00 + 329,00)1,06^{-t} = 360,00 \cdot 1,06^{-1} + 329,00 \cdot 1,06^{-3}$$

cioè

$$t = 1{,}925998875 \text{ anni } \simeq \text{ 1 anno e 338 giorni.}$$

**Risoluzione esercizio n. 8.3**

Per quanto riguarda le proprietà e la classificazione dei criteri di scelta si veda il manuale.

Nel caso del criterio TRM, in riferimento a un progetto $A = [a; t]$, caratterizzato dal vettore $a$ delle poste e dal vettore $t$ delle corrispondenti scadenze, l'indice TRM è $f(A) = S_n(x; y)$, con $S_n(x; y)$ ultimo elemento della successione dei saldi di $A$, calcolati, come noto, ai tassi $x$ ed $y$.

Se si ridimensiona il progetto $A$ con un fattore $k$, con $k > 0$, si ottiene il progetto $kA = [ka; t]$; in tal caso ogni saldo viene moltiplicato per $k$ e in relazione al TRM di $kA$ vale quanto segue:

$$f(kA) = kS_n(x; y) = kf(A), \qquad \forall k > 0\,;$$

il criterio del TRM, perciò, è un criterio assoluto.

**Risoluzione esercizio n. 8.4**

Si veda il manuale.

**Risoluzione esercizio n. 8.5**

La sola relazione vera è la seguente:

$$\text{REA}\,(A + A') = \text{REA}\,(A) + \text{REA}\,(A')\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 8.6**

Il progetto $A$ è preferito a $B$ solo nel caso si abbia $s_n\,(x, y) > 0\,.$

**Risoluzione esercizio n. 8.7**

La sola relazione vera è

$$\text{REA}(A) \text{ è funzione lineare di } a.$$

**Risoluzione esercizio n. 8.8**

In riferimento alla funzione $\text{REF}(i)$, con $u = 1 + i$, si ha quanto segue:

$$\begin{aligned} \text{REF}(i) &= -100,00u^3 + 360,00u^2 - 559,00u + 329,00\,, \qquad i > -1\,, \\ \text{REF}(0) &= +30,00\,; \end{aligned}$$

$$\lim_{i \to -1^+} \text{REF}(i) = 329,00 \qquad\qquad \lim_{i \to +\infty} \text{REF}(i) = -\infty$$

$$\text{REF}'(i) = -3 \cdot 100,00u^2 + 2 \cdot 360,00u - 559,00\,, \qquad \text{REF}'(0) = -139,00\,,$$
$$\text{REF}''(i) = -2 \cdot 300,00u + 2 \cdot 360,00\,;$$

si può osservare che la derivata prima $\text{REF}'(i)$ è negativa, $\forall i > -1$, e, perciò, la funzione $\text{REF}(i)$ è strettamente decrescente e interseca l'asse $i$ in un solo punto;

a seguito di quanto sopra anche il rendimento economico attualizzato, $\text{REA}(i)$, si azzera per un unico tasso $i$, tasso interno del progetto. Tale tasso, in quanto si ha $\text{REF}(0) > 0$, è positivo;

nel caso sia richiesto il grafico di $\text{REF}(i)$, si può notare che $\text{REF}''(i)$ cambia segno per $i = 20\%$, passando da positivo a negativo; per tale motivo, per $i = 20\%$, la funzione $\text{REF}(i)$ presenta un flesso discendente, con ordinata $\text{REF}(0{,}2) = 3{,}8$ e tangente inflessionale con $\text{REF}'(0{,}2) = -127$;

si può, infine, precisare che il tasso interno, TI, del progetto $A$ assume un valore superiore al 20% (si ha infatti TI $\simeq$ 22,99%);

nella *fig* 9.1, che segue, sono tracciati i grafici della funzione $\text{REF}(i)$, a tratto pieno, e della funzione $\text{REA}(i)$, a tratto più marcato.

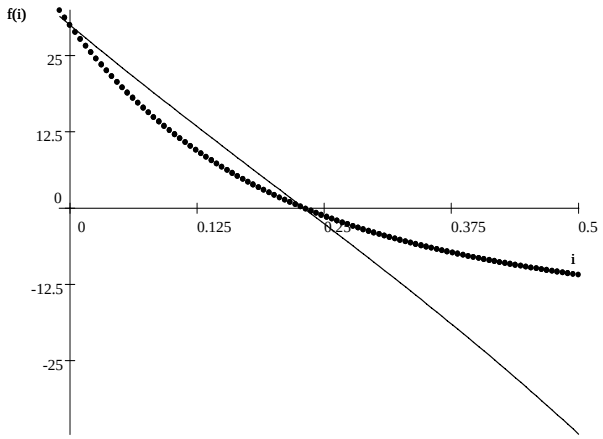


*fig.* 8.1

**Risoluzione esercizio n. 8.9**

La proposizione è sempre vera.

**Risoluzione esercizio n. 8.10**

Con capitale investito pari a € $100,00$, i seguenti progetti $A$ e $B$ sodddisfano le condizioni poste:

*investimento a redditi staccati*

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A:$ | capitali in € | $-100,00$ | $+20,00$ | $+20,00$ | $+120,00$ |

*investimento a redditi incorporati*

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B:$ | capitali in € | $-100,00$ | 0 | 0 | $+172,80$ |

in entrambi casi, il capitale è investito in progetti del tipo dei Lutz, e produce redditi al tasso del 20% annuo; tale tasso, infatti, verifica la condizione $\text{REA}(i) = 0$

$$\text{REA}_A(0,2) = -100,00 + \frac{20,00}{1{,}2} + \frac{20,00}{1{,}2^2} + \frac{120,00}{1{,}2^3} = 0$$

e

$$\text{REA}_B(0,2) = -100,00 + \frac{172{,}80}{1{,}2^3} = 0\,;$$

la motivazione dell'attribuzione, al reddito annuo, dell'aggettivo *staccato* risiede nel fatto che tale reddito, nel progetto $A$ pari a € $20,00$, è esigibile alla fine di ogni anno e, alla fine dell'investimento, oltre al reddito, viene recuperato anche il capitale, inizialmente investito, pari a € $100,00$;

nel caso i redditi man mano prodotti non vengano prelevati, bensì sommati al capitale per produrre altri redditi, sono detti *incorporati*.

Si può osservare che tale procedura corrisponde allo schema tipico del regime di capitalizzazione composta come può verificarsi, con riferimento al progetto $B$, con la seguente relazione: $100,00(1+0{,}20)^3 = 172{,}80$.

**Risoluzione esercizio n. 8.11**

Indicato con $K$ l'importo del denaro personale investito, quello preso a prestito sarà pari a € $100.000,00 - K$;

a fine anno, il capitale da rimborsare sarà pari a € $1{,}1(100.000,00 - K)$ mentre il ricavo netto sarà

$$125.000,00 - 1{,}1(100.000,00 - K) = 15.000,00 + 1{,}1 \cdot K\,;$$

il progetto finanziario ha un ROE del 30% nel caso il capitale $K$ sia impiegato a tale tasso; deve, quindi, essere verificata la seguente condizione

$$K \cdot 1{,}3 = 15.000,00 + 1{,}1 \cdot K$$

da cui $K = 75.000,00$.

**Risoluzione esercizio n. 8.12**

La gestione del progetto $A$ impone un finanziamento immediato, cui seguirà, al secondo anno, un ulteriore finanziamento; il rimborso dovrà essere gestito nel modo

più conveniente, cioè, nel caso il progetto renda disponibile dei ricavi, questi saranno utilizzati per ridurre il debito residuo del finanziamento stesso; si ha, perciò, quanto segue:

| | | |
|---|---|---|
| all'epoca $t = 0$ : | finanziamento $f_0$ : | $f_0 = 500,00 - 200,00 = 300,00$; |
| all'epoca $t = 1$ : | capitale da rimborsare $s_1$ : | $s_1 = 300,00 \cdot 1,15 = 345,00$ |
| | ricavo $r_1$ : | $r_1 = 145,00$ |
| | finanziamento $f_1$ : | $f_1 = s_1 - r_1 = 200,00$ |
| all'epoca $t = 2$ : | capitale da rimborsare $s_2$ : | $s_2 = 200,00 \cdot 1,15 = 230,00$ |
| | costo $c_2$ : | $c_2 = 454,00$ |
| | finanziamento $f_2$ : | $f_2 = s_2 + c_2 = 684,00$ |
| all'epoca $t = 3$ : | capitale da rimborsare $s_3$ : | $s_3 = 684,00 \cdot 1,15 = 786,60$ |
| | ricavo $r_3$ : | $r_3 = 1.200,00$ |
| | netto ricavo finale $N_3$ : | $N_3 = r_3 - s_3 = 413{,}40$; |

il progetto $A + F$ può essere rapprentato come segue:

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A + F$ : | capitali in € | $-200,00$ | 0 | 0 | $+413,40$ |

il progetto $A + F$ è un progetto di investimento PIPO, è,quindi, il tasso interno $x$ esiste, è un TIR e risolve l'equazione

$$200,00(1 + x)^3 = 413{,}40,$$

cioè $x = 0,273835923 \simeq 27{,}38\%$, annuo;

il $\text{REA}_A(i)$ del progetto $A$ è ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} \text{REA}_A(i) &= -500,00 + \frac{145,00}{1+i} - \frac{454,00}{(1+i)^2} + \frac{1.200,00}{(1+i)^3} \\ &= -500,00 + 145,00v - 454,00v^2 + 1.200,00v^3 \end{aligned}$$

e si ha $\text{REA}_A(20\%) = 0$;

il tasso del 20% annuo composto è tasso interno del progetto se la funzione $\text{REA}_A(i)$ si annulla, con $i > -1$, solo per tale valore; a tal proposito, osservato che la derivata prima, $\text{REA}'_A(i)$, di tale funzione

$$\text{REA}'_A(i) = -145,00v^2 + 2 \cdot 454,00v^3 - 3 \cdot 1.200,00v^4$$

è negativa, con $i > -1$, la funzione $\text{REA}_A(i)$ è strettamente decrescente e, quindi, il tasso $i = 20\%$ è TI del progetto $A$;

in relazione al $\text{TIR}_{A+F}$ del progetto $A+F$ e al $\text{TI}_A$ del progetto $A$, si osserva quanto segue:

nel caso del progetto $A+F$, il denaro personale di € $200,00$ è investito nel progetto $A+F$ e i relativi finanziamenti $f_0 = 300,00$, $f_1 = 200,00$ e $f_2 = 684,00$ sono rimborsati al tasso del 15%;

nel caso del progetto $A$, non viene mai immesso nel progetto denaro personale e i finanziamenti ottenuti di fatto per la gestione del progetto sono simborsati al tasso interno del progetto stesso, come può verificarsi eseguendo le relative operazioni integrative, e, ovviamente, ottenendo un ricavo finale nullo:

| | | |
|---|---|---|
| all'epoca $t = 0$ : | finanziamento $f_0$ : | $f_0 = 500,00$; |
| all'epoca $t = 1$ : | capitale da rimborsare $s_1$ : | $s_1 = 500,00 \cdot 1,20 = 600,00$ |
| | ricavo $r_1$ : | $r_1 = 145,00$ |
| | finanziamento $f_1$ : | $f_1 = s_1 - r_1 = 455,00$ |
| all'epoca $t = 2$ : | capitale da rimborsare $s_2$ : | $s_2 = 455,00 \cdot 1,20 = 546,00$ |
| | costo $c_2$ : | $c_2 = 454,00$ |
| | finanziamento $f_2$ : | $f_2 = s_2 + c_2 = 1.000,00$ |
| all'epoca $t = 3$ : | capitale da rimborsare $s_3$ : | $s_3 = 1.000,00 \cdot 1,20 = 1.200,00$ |
| | ricavo $r_3$ : | $r_3 = 1.200,00$ |
| | netto ricavo finale $N_3$ : | $N_3 = r_3 - s_3 = 0$. |

**Risoluzione esercizio n. 8.13**

Il valore complessivo dei vecchi titoli non è noto, ma non è necessario per poter effettuare la scelta tra le due proposte; a tale scopo, infatti, è sufficiente far riferimento a un valore pari a 100;

nel caso siano conservati i vecchi titoli, ogni 31 dicembre, si incasseranno le cedole $C_V$, con

$$C_V = 100 \cdot 0,13 = 13$$

e l'operazione finanziaria $V$ corrispondente prevede i seguenti flussi di cassa:

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ : | valori di riferimento | 0 | +13 | +13 | +13 | +100 + 13 |

nel caso siano venduti i vecchi titoli e, con il ricavato $K$, siano acquistati i titoli nuovi al prezzo di 98 per ogni 100 di valore nominale, il numero dei nuovi titoli acquistati è pari a $\frac{K}{98}$; il valore nominale, $vn$, complessivo dei nuovi titoli acquistati, perciò, è il seguente:

$$vn = \frac{K}{98}100;$$

tali titoli, ogni 31 dicembre, produrranno le cedole $C_N$, con

$$C_N = \frac{K}{98}100 \cdot 0,10 = \frac{10K}{98}$$

e l'operazione finanziaria $N$ corrispondente prevede i seguenti flussi di cassa:

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ : | valori di riferimento | 0 | $+\frac{10K}{98}$ | $+\frac{10K}{98}$ | $+\frac{10K}{98}$ | $+\frac{K}{98}102+\frac{10K}{98}$ |

i vecchi titoli, a ogni scadenza, produrranno un incasso superiore a quello prodotto dai nuovi se si ha

$$\begin{cases} 13 > \dfrac{10K}{98} \\ 113 > \dfrac{112K}{98} \end{cases}, \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} K < 127{,}4 \\ K < 98{,}875 \end{cases},$$

e, infine, se

$$0 < K < 98{,}875\,;$$

nel caso sia $K = 107,8$ , il valore nominale $vn$ complessivo dei nuovi titoli acquistati, è il seguente:

$$vn = \frac{107,8}{98}100 = 110\,;$$

tali titoli, ogni 31 dicembre, produrranno le cedole

$$C_N = \frac{10 \cdot 107,8}{98} = 11$$

e un ricavo finale $n_4$ , con

$$n_4 = \frac{107,8}{98}102 + \frac{10 \cdot 107,8}{98} = 123,2\,;$$

il $\text{REA}_N(i)$, al tasso $i$, annuo composto, con $v = (1+i)^{-1}$, dell'operazione finanziaria $N$ è ottenuto come segue:

$$\text{REA}_N(i) = 11v + 11v^2 + 11v^3 + 123{,}2v^4\,;$$

il $\text{REA}_V(i)$, al tasso $i$, annuo composto, dell'operazione finanziaria $V$ è

$$\text{REA}_V(i) = 13v + 13v^2 + 13v^3 + 113v^4\,;$$

è preferibile, perciò, conservare i vecchi titoli, sulla base del criterio REA al tasso $i$, annuo, con $i \geq 0$ , se si ha

$$\text{REA}_V(i) > \text{REA}_N(i)$$

cioè,

$$13v + 13v^2 + 13v^3 + 113v^4 > 11v + 11v^2 + 11v^3 + 123{,}2v^4\,,$$

da cui

$$1 + v + v^2 - 5,1v^3 > 0\,, \qquad \text{con} \quad v = (1+i)^{-1}\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 8.14**

La successione dei saldi, a tasso $i$, è costituita dai seguenti elementi:

$$\begin{aligned}
S_0(i) &= -50.000,00\,; \\
S_1(i) &= -50.000,00(1+i) + 40.000,00 = +10.000,00\,[-5\,(1+i)+4]\ ; \\
S_2(i) &= +10.000,00\,[-5\,(1+i)+4]\,(1+i) + 20.000,00 = \\
&= +10.000,00\,[-5(1+i)^2 + 4(1+i) + 2]\ ;
\end{aligned}$$

il pay-back, al tasso $i$, del progetto è pari a due anni se

$$\begin{cases} S_0(i) < 0 \\ S_1(i) < 0 \\ S_2(i) \geq 0 \end{cases}$$

si può osservare quanto segue:

$S_0(i) < 0\,, \qquad \forall i \geq 0\,;$

$S_1(i) = +10.000,00\,[-5i-1] < 0\,, \qquad \forall i \geq 0\,;$

$S_2(i) = +10.000,00\,[-5(1+i)^2 + 4(1+i) + 2] \geq 0\,,$

la terza disequazione è vera per i valori $i$, con

$$0 \leq i \leq i^*\,, \quad \text{e} \quad i^* = 0,148331477 \simeq 14,83\% \text{ annuo;}$$

il *pay-back*, calcolato al tasso $i$, risulta, perciò, uguale a due anni con

$$0 \leq i \leq 14,83\%\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 8.15**

Il progetto $C$ può essere schematizzato come segue

| anni | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $C$ : € | $-30.000,00\alpha - 90.000,00\beta$ | $+130.000,00\beta$ | $+44.000,00\alpha$ |

e, poichè, $C$ ha posta iniziale pari a € $60.000,00$, si ha

$$-30.000,00\alpha - 90.000,00\beta = 60.000,00$$

cioè

$$\alpha = 2 - 3\beta\,,$$

e, quindi, essendo $\alpha$ e $\beta$ entrambi $\geq 0$, si ha

$$0 \leq \beta \leq \frac{2}{3}\,;$$

il progetto $C$, perciò, può essere schematizzato come segue

| anni | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $C$ : € | $-60.000,00$ | $+130.000,00\beta$ | $+88.000,00 - 132.000,00\beta$ |

e si può osservare che, per la condizione su evidenziata, l'ultima posta è positiva; il progetto $C$, è, quindi, un progetto di tipo P.I.C.O., dotato di un unico TIR, che risulterà positivo in quanto la somma delle poste è positiva; tale TIR è del 35%, annuo composto, se è soddisfatta la condizione $\text{REA}(35\%) = 0$ cioè

$$\text{REA}(35\%) = -60.000,00 + 130.000,00\beta \cdot 1,35^{-1}\,(+88.000,00 - 132.000,00\beta)\,1,35^{-2} = 0\,;$$

con l'applicazione del metodo di bisezione si ha

$$\beta \simeq 0,490\,8$$

e, quindi,

$$\alpha \simeq 0,327\,2\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 8.16**

Il TIR del progetto $A$ è del 5%, mentre il progetto $B$ non è dotato di tasso interno in quanto l'equazione corrispondente al REA nullo

$$\text{REA}_B(i) = +1.000,00 - 2.000,00\,(1+i)^{-1} + 1.100,00\,(1+i)^{-2} = 0\,,$$

non presenta radici reali; per tale motivo non è possibile stabilire un ordinamento tra i progetti $A$ e B sulla base del TIR;

si può osservare, però, che il progetto $B$ è *banalmente* preferito al progetto $A$ in quanto i rispettivi saldi assumono i seguenti valori

$$\begin{aligned}
S_A^0 & & &= & 0,00 \\
S_A^1 & & &= & -2.000,00 \\
S_A^2 & &= -2.000,00 + 2.100,00 &= & +100,00
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_B^0 & & &= & +1.000,00 \\
S_B^1 & &= +1.000,00 - 2.000,00 &= & -1.000,00 \\
S_B^2 & &= -1.000,00 + 1.100,00 &= & +100,00
\end{aligned}$$

e si ha

$$S_B^k \geq S_A^k \qquad \text{con } k = \{0,\ 1,\ 2\}\ ;$$

si può osservare, infatti, che il progetto $B$ è ottenuto dal progetto $A$ anticipando l'incasso di € 1.000,00 dalla scadenza $t = 2$ alla scadenza iniziale $t = 0$.

**Risoluzione esercizio n. 8.17**

Il progetto può essere caratterizzato evidenziando costi e ricavi

| anni | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| costi: € | 50.000,00 | | 80.000,00 | | |
| ricavi: € | | 10.000,00 | | 50.000,00 | 90.00,00 |

e, su tale base, si può calcolare la duration $\vartheta^-$ dei costi (media aritmetica ponderata delle scadenze dei costi, con pesi i valori attuali dei costi) e la duration $\vartheta^+$ dei ricavi (media aritmetica ponderata delle scadenze dei ricavi, con pesi i valori attuali dei ricavi);

utilizzando, per le valutazioni, la generica legge di attualizzazione $\dfrac{1}{f(t)}$ si ha

$$\vartheta^- = \frac{0 \cdot \dfrac{50}{f(0)} + 2 \cdot \dfrac{80}{f(2)}}{\dfrac{50}{f(0)} + \dfrac{80}{f(2)}} \qquad \vartheta^+ = \frac{1 \cdot \dfrac{10}{f(1)} + 3 \cdot \dfrac{50}{f(3)} + 4 \cdot \dfrac{90}{f(4)}}{\dfrac{10}{f(1)} + \dfrac{50}{f(3)} + \dfrac{90}{f(4)}},$$

mentre, con $\dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{1}{1,1^t}$, si ha

$$\vartheta^- = \frac{0 \cdot \dfrac{50}{1} + 2 \cdot \dfrac{80}{1,1^2}}{\dfrac{50}{1} + \dfrac{80}{1,1^2}} \qquad \vartheta^+ = \frac{1 \cdot \dfrac{10}{1,1} + 3 \cdot \dfrac{50}{1,1^3} + 4 \cdot \dfrac{90}{1,1^4}}{\dfrac{10}{1,1} + \dfrac{50}{1,1^3} + \dfrac{90}{1,1^4}};$$

osservato che si ha

$$\vartheta^- = 1,138\,790\,036 < \vartheta^+ = 3,400\,353\,736\,,$$

e che la $f(t) = 1,1^t$ caratterizza il regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, al tasso del 10% annuo, è possibile qualificare il progetto $A$ come investimento sulla base della duration al tasso del 10%, annuo composto.

**Risoluzione esercizio n. 8.18**

I saldi $S_k$, a tasso nullo, sono ottenuti come segue

$$\begin{array}{lll} S_0 & & = -10.000,00 \\ S_1 & = -10.000,00 + 2.900,00 & = -7.100,00 \\ S_2 & = -7.100,00 - 9.080,00 & = -16.180,00 \\ S_3 & = -16.180,00 + 24.000,00 & = +7.820,00 \end{array}$$

e, quindi, il relativo vettore dei saldi $s(0)$ è

$$s(0) = \{\ -10.000,00\,;\quad -7.100,00\,;\quad -16.180,00\,;\quad +7.820,00\,;\ \}\ ;$$

i saldi $S_k(15\%)$, al tasso del 15%, annuo, sono ottenuti come segue:

$$
\begin{array}{lll}
S_0(15\%) & & = \quad -10.000,00 \\
S_1(15\%) & = -10.000,00 \cdot 1,15 + 2.900,00 & = \quad -8.600,00 \\
S_2(15\%) & = -8.600,00 \cdot 1,15 - 9.080,00 & = \quad -18.970,00 \\
S_3(15\%) & = -18.970,00 \cdot 1,15 + 24.000,00 & = \quad +2.184,50
\end{array}
$$

e, quindi, il relativo vettore dei saldi $s(15\%)$ è

$$
s(15\%) = \left\{ \ -10.000,00\,; \quad -8.600,00\,; \quad -18.970,00\,; \quad +2.184,50\,; \ \right\} \ ;
$$

dall'esame dei vettori dei saldi emerge quanto segue:

a) in entrambi i vettori, si ha una sola inversione di segno, da quello negativo a quello positivo, e, per tale motivo il progetto può essere qualificato come un investimento;

b) il saldo finale $S_3(15\%) = +2.184,50$ indica che, nel caso un operatore, per far fronte ai costi, alle corrispondenti scadenze, si finanzi al tasso del 15%, e, inoltre, gestisca il debito al meglio, cioè usi i ricavi del progetto per ridurre il debito e per chiuderlo al termine del progetto stesso, egli, a tale epoca, avrà diritto a un capitale finale di € 2.184,50; l'importo di tale capitale corrisponde al valore assunto dal rendimento economico finale, REF(15%), al 15%; si ha, infatti,

$$
\begin{aligned}
&\text{REF}(15\%) = \\
&= -10.000,00 \cdot 1,15^3 + 2.900,00 \cdot 1,15^2 - 9.080,00 \cdot 1,15 + 24.000,00 = \\
&= +2.184,50\,;
\end{aligned}
$$

c) il saldo finale $S_3(15\%)$ permette di individuare l'importo $C_0'$ del capitale che l'operatore deve ottenere come finanziamento, all'epoca iniziale $t = 0$,

$$
C_0' = \frac{2.184,50}{1,15^3} = 1.436,344\,21 \simeq 1.436,34\,,
$$

da aggiungere alla posta iniziale $C_0$ stessa, cioè

$$
C_0 + C_0' \simeq 10.000,00 + 1.436,34 = 11.436,34\,,
$$

tale che, gestendo il debito $C_0 + C_0'$ al meglio, ottenga un capitale residuo finale nullo; l'importo del capitale $C_0' = 1.436,344\,21$ rappresenta il REA(15%) del progetto; si ha, infatti,

$$
\begin{aligned}
&\text{REA}(15\%) = \\
&= -10.000,00 + 2.900,00 \cdot 1,15^{-1} - 9.080,00 \cdot 1,15^{-2} + 24.000,00 \cdot 1,15^{-3} = \\
&= +1.436,344\,21\,;
\end{aligned}
$$

d) il saldo finale $S_3(15\%)$ corrisponde al valore del TRM($i$; 15%) del progetto, nel caso sia utilizzato il tasso del 15% annuo, per valutare i saldi negativi, mentre il tasso $i$, utilizzato per valutare i saldi positivi, non sarà mai applicato; si ha, infatti, TRM($i$; 15%) $= +2.184,50$.

# 9 LE SOLUZIONI APPROSSIMATE DI UNA EQUAZIONE: il metodo di bisezione

**Risoluzione esercizio n. 9.1**

Dalla condizione di equità finanziaria si ottiene la seguente equazione in $t$

$$800,00 = 100,00 \cdot 1,07^{3t} + 300,00 \cdot 1,07^{2t}$$

cioè

$$1,07^{3t} + 3 \cdot 1,07^{2t} - 8 = 0\,;$$

posto

$$y = 1,07^{3t} + 3 \cdot 1,07^{2t} - 8\,,$$

la ricerca degli zeri della funzione $y = f(t)$ corrisponde alla ricerca delle soluzioni reali dell'equazione; dall'applicazione del teorema degli zeri relativamente, ad esempio, all'intervallo $[0;\ 10]$ e con considerazioni che permettono di isolare lo zero in tale intervallo, si ha quanto segue:

a) $f(0) = -8$ e $f(10) = +11,221\,308\,43$; tali valori, unitamente alla continuità della funzione garantiscono l'esistenza di zeri appartenenti all'intervallo $(0\ ;\ 10)$;

b) $y' = 1,07^{3t} \cdot 3 \cdot \ln 1,07 + 3 \cdot 1,07^{2t} \cdot 2 \cdot \ln 1,07 > 0$ con $\forall t$; il segno positivo della derivata prima garantisce che la funzione sia crescente;

quanto sopra indicato assicura l'esistenza e l'unicità di uno zero della funzione nei punti interni dell'intervallo considerato $[0;\ 10]$;

un valore approssimato di tale zero può essere individuato con il metodo di bisezione e i risultati delle successive iterazioni del procedimento, schematizzati nella tabella che segue, sono ottenuti, con l'adozione della seguente simbologia, come ora precisato:

il numero d'ordine dell'iterazione è $k$, con $k = \{1;\ 2; ...;\ n\}$;

considerato un intervallo $I_k = [a_k;\ b_k]$, la sua ampiezza è $b_k - a_k$;

il punto medio dell'intervallo $I_k$ è $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$;

l'ordinata del punto medio $c_k$ è $f(c_k)$ e, a seconda del segno di $f(c_k)$, l'ascissa $c_k$ assumerà il ruolo di primo estremo $a_{k+1}$ o di secondo estremo $b_{k+1}$ dell'intervallo successivo $I_{k+1}$; l'altro estremo sarà, rispettivamente, $b_k$ oppure $a_k$ e si avrà, quindi, $I_{k+1} = [c_k;\ b_k]$ oppure $I_{k+1} = [a_k;\ c_k]$;

il primo estremo $a_k$ dell'intervallo, a cui corrisponde l'ordinata $f(a_k)$, è indicato $a_k \to f(a_k)$ e, a seconda che la funzione sia, rispettivamente, crescente o decrescente nell'intervallo $I_1$, la colonna della tabella sarà intestata $a_k \to f(a_k) < 0$ (vedi *tab.* 9.1) oppure $a_k \to f(a_k) > 0$ (vedi *tab.* 9.2);

il secondo estremo $b_k$ dell'intervallo, a cui corrisponde l'ordinata $f(b_k)$, è indicato $b_k \to f(b_k)$ e, a seconda che la funzione sia, rispettivamente, crescente o decrescente nell'intervallo $I_1$, la colonna della tabella sarà intestata $b_k \to f(b_k) > 0$ (vedi *tab.* 9.1) oppure $b_k \to f(b_k) < 0$ (vedi *tab.* 9.2); con i dati del problema si ha

| $I_k = [a_k;\ b_k]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $a_k \to f(a_k) < 0$ | $b_k \to f(b_k) > 0$ | $b_k - a_k$ | $c_k$ | $f(c_k)$ |
| 1 | 0 | 10 | $10 > T$ | 5 | $+0,66 > 0$ |
| 2 | 0 | 5 | $5 > T$ | $2,5$ | $-2,13 < 0$ |
| 3 | $2,5$ | 5 | $2,5 > T$ | $3,75$ | $-0,87 > 0$ |
| 4 | $3,75$ | 5 | $1,25 > T$ | $4,375$ | $-0,14 < 0$ |
| 5 | $4,375$ | 5 | $0,625 > T$ | $4,6875$ | $+0,24 > 0$ |
| 6 | $4,375$ | $4,6875$ | $0,3125 < T$ | | |

*tab.* 9.1

la soluzione approssimata di $t$, con la tolleranza assegnata, è, perciò, qualunque valore interno all'intervallo $[4,375;\ 4,6875]$ cioè, ad esempio, $t \simeq 4,5 = 4$ anni e 6 mesi.

Si può osservare, infine, quanto segue:

è possibile ottenere in modo preliminare il numero $n$ (con $n$ numero intero) delle iterazioni necessarie alla determinazione della soluzione in riferimento alla tolleranza $T$ assegnata, come segue

$$n \geq \frac{\ln(b_1 - a_1) - \ln T}{\ln 2} + 1 = \frac{\ln(10 - 0) - \ln 0,5}{\ln 2} + 1 = 5,32...$$

e, quindi, $n = 6$ mentre su si è via via verificata l'ampiezza dell'intervallo $I_k$;

proseguendo con l'applicazione del procedimento di bisezione, la soluzione con una precisione maggiore è, ad esempio, $t^* \simeq 4,493\,495\,955$;

a indicazione di quanto su caratterizzato, si può osservare, in *fig.* 9.1, il grafico della funzione $y = f(t)$.

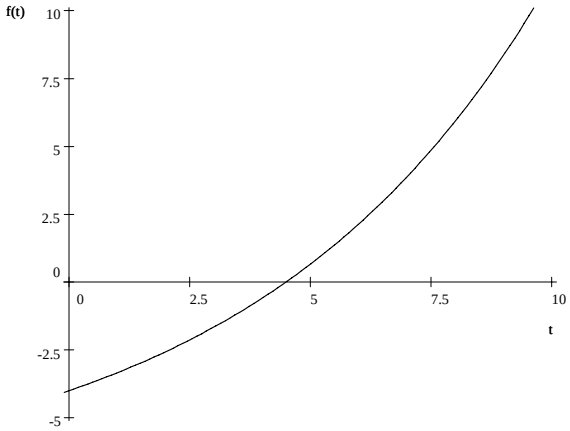


*fig.* 9.1

**Risoluzione esercizio n. 9.2**

Il Tasso Interno di Costo $x$ è la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} 1.000,00 \;=\; & 228,56\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^3} + 2\frac{1}{(1+x)^5}\right) + \\ & +123,60\left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(1+x)^8}\right); \end{aligned}$$

posto $v = \dfrac{1}{1+x}$, per abbreviare i calcoli, è conveniente trovare, in via preliminare, una soluzione approssimata dell'equazione $f(v) = 0$ con

$$f(v) = 1.000 - 228,56(v + v^3 + 2v^5) - 123,6(v^2 + v^4 + v^6 + v^8) = 0\,,$$

e, successivamente, trovare la soluzione cercata $x$;

si può osservare che la funzione $y = f(v)$ è continua e decrescente, con $v \geq 0$ ed è

$$f(0) = 1.000\,, \qquad \text{e} \qquad \lim_{v \to +\infty} f(v) = -\infty\,,$$

per cui esiste ed è unico lo zero $v^*$ della funzione $y = f(v)$ con $v$ interno, ad esempio, all'intervallo $[0;\ 1]$; si ha, infatti, $f(1) \simeq -408,64$;

l'applicazione delle successive iterazioni del metoto di bisezione conduce ai risultati presentati nella tabella che segue

| | $I_k = [a_k;\ b_k]$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $a_k \to f(a_k) > 0$ | $b_k \to f(b_k) < 0$ | $b_k - a_k$ | $c_k$ | $f(c_k)$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $0,5$ | $+801,8 > 0$ |
| 2 | $0,5$ | 1 | $0,5$ | $0,75$ | $+480,67 > 0$ |
| 3 | $0,75$ | 1 | $0,25$ | $0,875$ | $+147,40 > 0$ |
| 4 | $0,875$ | 1 | $0,125$ | $0,9375$ | $-95,42 < 0$ |
| 5 | $0,875$ | $0,9375$ | $0,0625$ | $0,90625$ | $+33,73 > 0$ |
| 6 | $0,90625$ | $0,9375$ | $0,03125$ | $0,921\,875$ | $-28,78 < 0$ |
| 7 | $0,90625$ | $0,921\,875$ | $0,015\,625$ | | |

*tab.* 9.2

la soluzione approssimata di $v$ è, perciò, qualunque valore interno all'intervallo $[0,90625;\ 0,921\,875]$ cioè, ad esempio,

$$v \simeq 0,91$$

cui corrisponde il tasso $x$ cercato, con

$$x = \frac{1}{v} - 1 \simeq 0,098\,901\,099 \simeq 9,89\% \text{ annuo;}$$

per quanto riguarda la tolleranza $T_v$ si ha

$$0,015\,625 \leq T_v < 0,03125\,;$$

si può osservare che la tolleranza è anche determinata come segue:

$$T_v \geq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = \frac{1-0}{2^{7-1}} = 0,015\,625 = b_7 - a_7\,;$$

si può osservare inoltre che, proseguendo con l'applicazione del procedimento di bisezione, la soluzione con una precisione maggiore è, ad esempio,

$$x^* = \frac{1}{0,914\,804\,612\,1} - 1 = 0,093\,129\,6 \simeq 9,31\% \text{ annuo;}$$

a indicazione di quanto su caratterizzato, si può osservare, in *fig.* 9.2, il grafico della funzione $y = f(v)$.

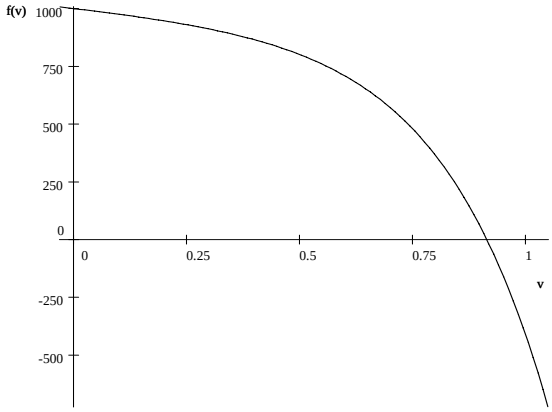


*fig.* 9.2

**Risoluzione esercizio n. 9.3**

L'accensione e l'ammortamento di un mutuo caratterizzano un progetto di provvista di fondi, un finanziamento quindi, dotato di un unico tasso interno di costo;

la condizione di equità finanziaria, con valutazioni riferite all'epoca iniziale, al tasso $x$, annuo composto, è

$$S = 0{,}36S\left[(1+x)^{-2} + (1+x)^{-3} + (1+x)^{-4} + (1+x)^{-5}\right],$$

e può essere riscritta nella forma $f(x) = 0$, cioè

$$f(x) = 1 - 0{,}36\left[(1+x)^{-2} + (1+x)^{-3} + (1+x)^{-4} + (1+x)^{-5}\right] = 0\,;$$

considerata la funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $(-1;\ +\infty)$, si osserva che essa è crescente e si ha

$$f(0) = -0,44\,; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(i) = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(i) = +1\,;$$

per quanto sopra indicato il valore $x$ cercato è positivo ed essendo, ad esempio $f(0,15) = +0,106$, tale valore $x$ appartiene all'intervallo $(0;\ 0,15)$;

può essere determinato un valore approssimato, con la precisione indicata, operando un numero $n$ di iterazioni individuato come segue

$$n \geq \frac{\ln(b_1 - a_1) - \ln T}{\ln 2} + 1 = \frac{\ln(0,15 - 0) - \ln 0,002}{\ln 2} + 1 = 7,228...$$

e, quindi, $n = 8$;

si può osservare che il numero delle iterazioni può essere ridotto considerando un intervallo $I_1$ di ampiezza più piccola rispetto a $(0;\ 0,15)$ ; considerato, ad esempio, $x = 0,09$ cui corrisponde $f(0,09) = -0,06999\,92$ , con $I_1 = [0,09;\ 0,15]$ si ha

$$n \geq \frac{\ln(b_1 - a_1) - \ln T}{\ln 2} + 1 = \frac{\ln(0,15 - 0,09) - \ln 0,002}{\ln 2} + 1 = 5,906...$$

e, quindi, $n = 6$ ;

l'applicazione delle successive sei iterazioni del metoto di bisezione conduce ai risultati presentati nella tabella che segue

| | $I_k = [a_k;\ b_k]$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $a_k \to f(a_k) < 0$ | $b_k \to f(b_k) > 0$ | $b_k - a_k$ | $c_k$ | $f(c_k)$ |
| 1 | $0,09$ | $0,15$ | $0,06 > T$ | $0,12$ | $+0,02\,37$ |
| 2 | $0,09$ | $0,12$ | $0,03 > T$ | $0,105$ | $-0,02\,163$ |
| 3 | $0,105$ | $0,12$ | $0,015 > T$ | $0,112\,5$ | $+1,\ 397$ |
| 4 | $0,105$ | $0,112\,5$ | $0,007\,5 > T$ | $0,108\,75$ | $-0,01\,002\,7$ |
| 5 | $0,108\,75$ | $0,112\,5$ | $0,003\,75 > T$ | $0,110\,625$ | $-0,004\,291$ |
| 6 | $0,110\,625$ | $0,112\,5$ | $0,001\,875 < T$ | | |

la soluzione approssimata $x$ è, perciò, qualunque valore dell'intervallo $(0,110\,625;\ 0,112\,5)$ cioè, ad esempio,

$$x \simeq 0,11234 = 11,23\% \text{ annuo;}$$

si può osservare infine, quanto segue:

proseguendo con l'applicazione del procedimento di bisezione, la soluzione con una precisione maggiore è, ad esempio, $x = 0,112\,037\,9588 \simeq 11,20\%$ ;

il grafico della funzione $y = f(x)$, nell'intervallo $I_1 = [0,09;\ 0,15]$ considerato, è il seguente

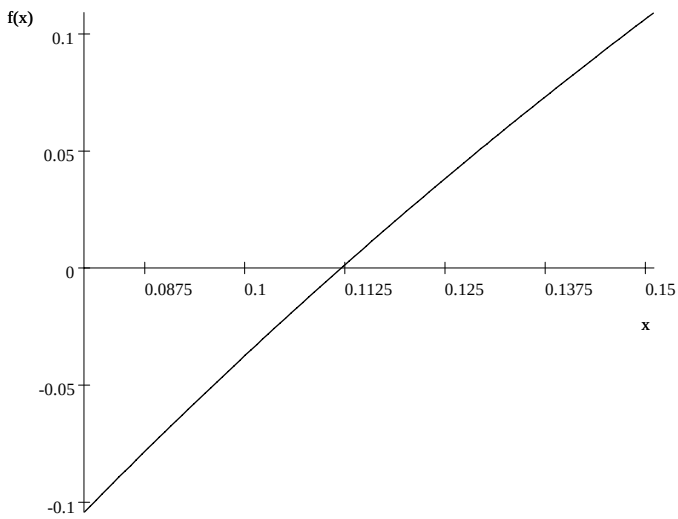


*fig.* 9.3

**Risoluzione esercizio n. 9.4**

Osservato che il tasso annuo di rimborso del prestito è, prima, del 10% e, poi, del 12%, il tasso $x$ al quale è effettuato il rimborso apparterrà all'intervallo $(10\%\,;\,12\%)$; tale tasso $x$ è l'unica soluzione dell'equazione

$$10.000,00 - 1.627,45\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right] - \left(4.724,21 + 1.095,59a_{\overline{7}|x}\right)\frac{1}{(1+x)^3} = 0\,,$$

cioè

$$x \simeq 11{,}05\%\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 9.5**

L'impresa realizza un progetto finanziario costituito da un ricavo, seguito da cinque costi che, secondo la classificazione dei LUTZ, è un progetto POCI; tale finanziamento, perciò, è dotato di un tasso interno $i^*$, con $i^* > 15\%$, che è il tasso minore adottato nelle valutazioni degli interessi passivi.

Il valore di $i^*$ può essere ottenuto determinando l'unico zero del $REA(i)$ oppure del montante $M(i)$; posto $u = 1 + i$, si ha l'equazione $M(u) = 0$, con

$$\begin{aligned} M(u) \;=\; & 100.000,00u^5 - 15.000,00u^4 - 29.818,76u^3 - 35.700,00u^2 - \\ & -77.637,52u - 20.000,00\,, \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$u \simeq 1,197\,4$$

e, quindi,

$$i^* \simeq 19,74\%\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 9.6**

Sulla base del criterio REA al tasso $i$, annuo composto, con $i \geq 0$, è preferibile conservare i vecchi titoli, se si ha

$$\text{REA}_V(i) > \text{REA}_N(i)$$

cioè se

$$1 + v + v^2 - 5,1v^3 > 0\,, \qquad \text{con} \quad v = (1+i)^{-1}\,;$$

i valori $v$, e, quindi, $i$, possono essere ottenuti dopo aver determinato l'esistenza e l'unicità della soluzione $i$ dell'equazione associata alla disequazione, e, infine, con l'applicazione del metodo di bisezione;

indicato con $f(i)$ il primo membro della disequazione su indicata, si ha

$$f(i) = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} - 5,1\frac{1}{(1+i)^3}\,;$$

si osserva che $f(i)$ può essere considerata il $\text{REA}_A(i)$ del progetto finanziario $A$ schematizzato sull'asse dei tempi come segue

| | anni | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A:$ | capitali in € | $+1,00$ | $+1,00$ | $+1,00$ | $-5,10$ |

il cui vettore dei capitali presenta una sola inversione di segno, da quello positivo a quello negativo; il progetto, quindi, è un finanziamento e $f(i) = \text{REA}_A(i)$ si azzera per un solo valore $i^*$ ; tale valore, inoltre, è positivo in quanto si ha

$$f(0) = -2,10\,; \qquad \lim_{i \to -1^+} f(i) = -\infty\,; \qquad \lim_{i \to +\infty} f(i) = +1\,;$$

applicando il metodo di bisezione, si ha $f(i^*) = 0$ , con

$$i^* \simeq 28{,}99\%\,;$$

sulla base del criterio REA, con $i > 28{,}99\%$, è, perciò, preferibile conservare i vecchi titoli.

**Risoluzione esercizio n. 9.7**

Il piano di costituzione del capitale è realizzato al tasso $i$, soluzione della equazione $f(i) = 0$ seguente, in cui, per brevità, si è posto $u = 1 + i$,

$$f(i) = 1.000,00(u^9 + u^8 + u^7) + 383,66\frac{u^7 - u}{i} - 8.200,43 = 0\,;$$

tale tasso $i$ sarà un valore appartenente all'intervallo $(7\%;\ 9\%)$ e si ha

$$i \simeq 7,21\%\,.$$

**Risoluzione esercizio n. 9.8**

Il piano di costituzione del capitale è realizzato al tasso $i$, soluzione della seguente equazione in cui, per brevità, si è posto $u = 1 + i$,

$$100,00 \cdot (u^8 + u^7 + u^6) + 218,13 \cdot (u^4 + u^2 + 1) = 1.112,08\,;$$

il tasso $i$, da determinare con il metodo di bisezione, sarà un valore interno all'intervallo $[4\%\,;\ 6\%]$ e un suo valore approssimato è $i \simeq 4{,}19\%$ .

**Risoluzione esercizio n. 9.9**

Il metodo di ammortamento $A$ è da te preferito a quello $B$, per i valori del tasso $i'$ che soddisfano la condizione $M(A) > M(B)$, cioè

$$\frac{i'}{1 - (1 + i')^{-5}} > 0,269\,383\,880\,6\,;$$

la soluzione dell'equazione associata a tale disequazione è $i' \simeq 10,83\%$ , e, quindi, i valori di $i'$ cercati sono i seguenti

$$i' > 10,83\%\,.$$